СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

под общей редакцией

Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

и

А. Р. ЯНПОЛЬСКОГО

В. М. БАБИЧ, М. Б. КАПИЛЕВИЧ,
С. Г. МИХЛИН, Г. И. НАТАНСОН, П. М. РИЗ,
Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ, М. М. СМИРНОВ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С. Г. МИХЛИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2 (03)
Б12
УДК 517.946 (083)

АННОТАЦИЯ

Настоящий выпуск серии *СМБ* посвящен линейным дифференциальным уравнениям математической физики. В этот выпуск включены как весьма конкретные сведения, относящиеся к важным частным задачам математической физики, так и сведения, касающиеся уравнений и задач более общего вида. Наряду с классическими исследованиями затронуты и многие работы последних лет.

В справочнике приведены важнейшие результаты по краевым задачам для уравнений и систем уравнений основных трех типов: гиперболического, эллиптического и параболического; рассмотрены также вырождающиеся уравнения и уравнения эллиптико-гиперболического типа. Особая глава посвящена задачам дифракции и распространения волн.

Справочник предназначен для математиков, механиков, физиков и инженеров, которым приходится в их практической и научной деятельности решать задачи математической физики или вообще использовать ее аппарат.

Справочная математическая библиотека
под общей редакцией
Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского

Линейные уравнения математической физики

М., 1964 г., 368 стр. с илл.

Редактор *Т. Н. Михайлова.*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева.* Корректор *М. Ф. Алексеева.*

Сдано в набор 18/XI 1963 г. Подписано к печати 14/II 1964 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 11,5. Условн. печ. л. 18,86. Уч.-изд. л. 17,4. Тираж 18 500 экз. Т-00962. Цена книги 97 коп. Заказ № 706.

Издательство «Наука».
Редакция физико-математических справочников.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького «Главполиграфпрома» Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, Гатчинская, 26.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава III

Уравнения Лапласа и Пуассона

Глава IV

Уравнение Гельмгольца

Глава V

Краевые задачи для общих эллиптических уравнений и систем

Глава VI

Уравнения и системы уравнений параболического типа

Глава VII

Вырождающиеся гиперболические и эллиптические уравнения

Глава VIII

Уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

Глава IX

Математические задачи теории дифракции и распространения волн

ПРЕДИСЛОВИЕ

Линейные дифференциальные уравнения математической физики представляют собой одну из самых обширных ветвей анализа; им посвящено большое число монографий и учебников и почти не поддающееся учету количество журнальных статей. В то же время это и весьма разветвленная часть анализа, смыкающаяся со многими другими частями того же анализа и математики вообще. В арсенал средств современной математической физики входят топология и специальные функции, функциональный анализ и классическая теория функций комплексной переменной, теория функций действительной переменной и методы приближенных вычислений; по своей проблематике математическая физика теснейшим образом связана как с самыми абстрактными разделами современной математики, так и с наиболее конкретными приложениями к задачам физики и техники.

Естественно, что столь разнородный материал создал и известную разнородность изложения: наряду с простыми вещами, о которых сказано в главах I—IV, дан и менее элементарный материал, содержащийся, например, в главах V и IX.

Построение данного выпуска *СМБ* в целом более или менее соответствует обычному построению курсов математической физики. В главе I даны общие свойства уравнений математической физики, приведение уравнений к каноническому виду, классификация уравнений математической физики по типам. Сформулирована задача Коши, даны общие указания о постановке других краевых задач.

В главе II указаны основные задачи, приводящие к гиперболическим уравнениям, дано решение основных задач для уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Подробно изложены задачи, связанные с интегрированием волнового уравнения. Обстоятельно изложен метод Фурье для уравнений с двумя и со многими независимыми переменными. Приведены важнейшие сведения об уравнениях и системах уравнений гиперболического типа более общего вида.

В главах III и IV изложены элементарные сведения об уравнениях Лапласа, Пуассона, Гельмгольца и их решениях; много внимания уделено результатам, получаемым методом разделения переменных. Более общим уравнениям (и системам) эллиптического типа посвящена глава V; в этой же главе рассмотрены и уравнения эллиптического типа с малым параметром при старших производных.

В главе VI рассмотрены параболические уравнения и системы. Первые пять параграфов этой главы содержат элементарные сведения об уравнении теплопроводности; последующие параграфы главы VI посвящены общей теории и менее элементарны.

Последние главы настоящего выпуска *СМБ* выходят за пределы обычных курсов математической физики. Главы VII и VIII близки между собой по теме: в главе VII рассматриваются вырождающиеся уравнения гиперболического и эллиптического типов; глава VIII относится к уравнениям смешанного эллиптико-гиперболического типа, играющего большую роль, например, в задачах газовой динамики.

Глава IX посвящена интересной для многочисленных приложений задаче дифракции, которая подробно рассмотрена для волнового уравнения, уравнений Максвелла и динамических уравнений теории упругости. В этой же главе рассмотрены и некоторые менее простые вопросы теории распространения волн.

В данном выпуске *СМБ* не отражены работы последних лет, относящиеся к исследованию самых общих систем уравнений с частными производными; как нам кажется, теория таких систем еще недостаточно устоялась. Не затронуты также многочисленные и важные исследования спектров эллиптических дифференциальных операторов, например оператора Шредингера.

Главы I, III, IV и §§ 1—5 главы VI написал П. М. Риз, главы II и IX — В. М. Бабич, §§ 1—3 главы V — С. Г. Михлин, §§ 4—5 главы V—Г. И. Натансон, §§ 6—10 главы VI — Л. Н. Слободецкий, главу VII — М. М. Смирнов, главу VIII— М. Б. Капилевич.

С. Михлин

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение, содержащее, кроме независимых переменных и искомой функции, частные производные этой функции, называется *дифференциальным уравнением с частными производными.*

Наивысший порядок входящих в уравнение частных производных называется *порядком дифференциального уравнения.*

Для математической физики наиболее важны и лучше всего изучены уравнения второго порядка. В случае двух независимых переменных уравнение второго порядка может быть записано в следующей общей форме:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Уравнение называется *линейным,* если оно линейно относительно искомой функции и всех ее производных. Линейное уравнение 2-го порядка с двумя независимыми переменными имеет следующий общий вид:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \tag{1.2}$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, ..., $c(x, y)$, $f(x, y)$ — некоторые заданные функции переменных x, y.

Если $f(x, y) \equiv 0$, то уравнение (1.2) называется *однородным,* в противном случае — *неоднородным.*

Рассмотрим уравнение, линейное относительно старших производных. Такое уравнение в случае двух независимых переменных имеет следующий вид:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (1.3)$$

Если коэффициенты A, B и C зависят не только от x и y, но и от u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, то уравнение называется *квазилинейным*. Линейное уравнение является частным случаем квазилинейного.

Линейное уравнение второго порядка от n независимых переменных может быть записано в следующей общей форме:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad (1.4)$$

где A_{ij}, B_i, C, f — заданные функции от n независимых переменных.

Будем рассматривать уравнение в частных производных порядка m. Функция u, заданная в некоторой области D изменения независимых переменных, называется *решением* или *интегралом* данного уравнения в области D, если в этой области функция u имеет непрерывные частные производные до порядка m включительно и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Требование существования частных производных порядка m часто бывает неоправданным с физической, а иногда и с математической точки зрения, поэтому, наряду с данным только что понятием «классического» решения, вводят еще понятие *обобщенного решения* уравнения в частных производных.

Мы дадим здесь простейшее определение.

Если существует последовательность классических в D решений данного дифференциального уравнения, которая в любой внутренней подобласти данной области D равномерно сходится к некоторой функции u, то функция u называется *обобщенным решением* данного дифференциального уравнения в данной области D.

Понятие обобщенного решения было введено С. Л. Соболевым.

Рассмотрим линейное уравнение порядка m с n независимыми переменными, которые обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$; неизвестную функцию обозначим, как и выше, через u. Перенеся известные слагаемые направо, а неизвестные — налево, мы приведем данное уравнение к виду

$$L[u]=f(x_1, x_2, \ldots, x_n); \tag{1.5}$$

если $f\equiv 0$, то уравнение окажется однородным и примет вид

$$L[u]=0. \tag{1.6}$$

Иногда скобки опускают и пишут просто Lu.

Символ $L[u]$ называется *линейным дифференциальным оператором* от функции u.

Линейные*) дифференциальные операторы обладают следующими двумя свойствами:

1) постоянный множитель выносится за знак оператора:

$$L[cu]=cL[u]; \tag{1.7}$$

2) оператор от суммы двух функций равен сумме операторов:

$$L[u_1+u_2]=L[u_1]+L_2[u_2]. \tag{1.8}$$

Отсюда вытекают следующие предложения.

Для однородных уравнений.

а) Если u — решение, а C — постоянная, то произведение Cu также есть решение.

б) Если u_1 и u_2 — решения, то сумма u_1+u_2 также есть решение.

Свойство б) распространяется на сумму с произвольным конечным числом слагаемых.

Если имеется бесконечная последовательность решений $\{u_n\}$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

независимо от его сходимости, называют *формальным решением*. Если решения u_n классические, ряд сходится равно-

*) Указанные ниже свойства и определяют понятие *линейности* операторов.

мерно и его сумма имеет необходимые частные производные, то сумма ряда будет классическим решением уравнения (1.6); если ряд сходится равномерно, но его сумма не имеет нужных частных производных, то эта сумма будет обобщенным решением уравнения (1.6).

Если классическое решение $u(x, \alpha)$ — интегрируемая функция параметра α, то интеграл

$$\int C(\alpha)\; u(x, \alpha)\, d\alpha,$$

где $C(\alpha)$ — произвольная непрерывная функция от α, а пределы интегрирования не зависят от точки x, будет либо классическим решением, если интеграл сходится равномерно и имеет нужные частные производные, либо обобщенным решением, если интеграл сходится равномерно, но не имеет нужных производных.

Для неоднородных уравнений.

а) Если u есть решение неоднородного уравнения, а v есть решение соответствующего однородного уравнения, то $u+v$ есть решение неоднородного уравнения.

б) Если u_1 есть решение неоднородного уравнения с правой частью f_1, а u_2 есть решение неоднородного уравнения с правой частью f_2, то u_1+u_2 есть решение уравнения с правой частью f_1+f_2. Последнее свойство распространяется и на сумму любого конечного числа слагаемых.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L[u] \equiv \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu. \tag{1.9}$$

Пусть в некоторой области D коэффициент C непрерывен, коэффициенты B_i непрерывно дифференцируемы, а коэффициенты A_{ij}, так же как и функция u, дважды непрерывно дифференцируемы. Оператор

$$M[v] \equiv \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv \tag{1.10}$$

называют *сопряженным* (часто — *сопряженным по Лагранжу*) к оператору L. Для оператора M сопряженным будет первоначальный оператор L.

Если оператор L совпадает с M, то он называется *самосопряженным.*

Самосопряженный оператор можно привести к виду

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+Cu.$$

Справедлива формула

$$vL[u]-uM[v]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}, \tag{1.11}$$

где

$$P_i=\sum_{j=1}^{n}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-u\,\frac{\partial (A_{ij}v)}{\partial x_j}\right)+B_iuv, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1.12}$$

Если D — конечная область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью S, то справедлива *формула Грина*

$$\int_D (vL[u]-uM[v])\,dx=\int_S\sum_{i=1}^{n}P_i\cos(\nu,\ x_i)\,dS. \tag{1.13}$$

Здесь приняты следующие обозначения: dx — элемент объема в пространстве координат $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$; dS — элемент поверхности; ν — направление внешней нормали к поверхности S; действие интегрирования, независимо от его кратности, обозначается одним знаком интеграла. Эти обозначения будут широко использованы в дальнейшем.

§ 2. Классификация и канонические формы уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Преобразуем уравнение (1.3), введя новые независимые переменные

$$\xi=\varphi_1(x,y),\qquad \eta=\varphi_2(x,y). \tag{1.14}$$

Мы предположим, что во всей рассматриваемой области переменных x и y якобиан преобразования не обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Такое преобразование приводит к следующему уравнению:

$$\bar{A}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\bar{B}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \bar{C}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \bar{\Phi}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \qquad (1.15)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2, \\ \bar{B} &= A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \\ \bar{C} &= A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

1. Классификация линейных уравнений с двумя независимыми переменными. Эта классификация определяется знаком дискриминанта $\delta = B^2 - AC$. Будем говорить, что линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными принадлежит в данной точке (x, y) к *гиперболическому, параболическому* или *эллиптическому* типу, если в этой точке соответственно $\delta > 0$, $\delta = 0$, $\delta < 0$. Уравнение принадлежит к тому или иному типу в данной области плоскости (x, y), если оно принадлежит к этому типу в каждой точке рассматриваемой области. Ниже мы будем считать, что в интересующей нас области тип уравнения сохраняется. Другие случаи будут рассмотрены в гл. VII и VIII.

Тип уравнения не меняется при любых преобразованиях переменных, при которых якобиан не обращается в нуль.

2. Канонические формы уравнений гиперболического типа. Выберем новые переменные ξ и η так, чтобы в уравнении (1.15) коэффициенты $\bar{A}$ и $\bar{C}$ обратились в нуль.

Из первого и третьего равенств (1.16) очевидно, что ξ и η должны удовлетворять уравнению

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad (1.17)$$

которое распадается на два:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} &= 0, \\ A\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

Решения этих уравнений определяются интегралами обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых *характеристическими*:

$$\left.\begin{aligned} A\,dy-(B+\sqrt{B^2-AC})\,dx=0,\\ A\,dy-(B-\sqrt{B^2-AC})\,dx=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Оба характеристических уравнения можно объединить в одно:

$$A\,(dy)^2-2B\,dx\,dy+C(dx)^2=0. \tag{1.20}$$

Решения уравнений (1.19) запишем в следующем виде:

$$\varphi_1(x,y)=\text{const},\qquad \varphi_2(x,y)=\text{const}, \tag{1.21}$$

и примем

$$\xi=\varphi_1(x,y),\qquad \eta=\varphi_2(x,y). \tag{1.22}$$

Если $\delta\neq 0$, то якобиан преобразования (1.22) отличен от нуля. Интегральные кривые $\varphi_1(x,y)=C$ и $\varphi_2(x,y)=C$ называются *характеристиками* рассматриваемого уравнения в частных производных. Уравнения гиперболического типа имеют два семейства различных и действительных характеристик.

Возвращаясь к уравнению (1.15), в котором теперь $\overline{A}=\overline{C}=0$, и деля его почленно на $2\overline{B}$, приведем его к следующей форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=\overline{\Phi}_1\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \tag{1.23}$$

называемой *первой канонической формой.*

Если функция Φ_1 линейна, то и $\overline{\Phi}_1$ будет линейна, и уравнение (1.23) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=f(\xi,\ \eta). \tag{1.24}$$

В случае постоянных коэффициентов a, b, c можно еще больше упростить это уравнение, введя вместо u новую неизвестную v, определенную равенством

$$u=e^{-(b\xi+a\eta)}\,v.$$

Тогда для v получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c_1 v = f_1(\xi, \eta),$$

где

$$c_1 = c - ab, \quad f_1(\xi, \eta) = f e^{(a\xi + b\eta)}.$$

Вводя новые независимые переменные

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta, \tag{1.25}$$

получим *вторую каноническую форму* уравнения (1.15):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_2\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{1.26}$$

Эта форма характеризуется отсутствием смешанной производной. Если $\Phi_2 \equiv 0$, то получается так называемое *волновое уравнение* с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0;$$

к этому уравнению приводит, например, исследование колебаний однородной струны (см. гл. II, § 4).

3. Каноническая форма уравнения параболического типа. Для уравнения параболического типа $\delta = 0$; оба семейства характеристик сливаются, как это видно из (1.19). Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

где $\varphi(x, y) = C$ — интеграл уравнения (1.17), а $\eta(x, y)$ — любая функция от x, y, независимая от $\varphi(x, y)$, например $\eta = y$. В этом случае $\overline{A} = 0$ и $\overline{B} = 0$, так как

$$\overline{B} = \left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{A}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0.$$

Разделив уравнение (1.15) на $\overline{C}$, получим каноническую форму параболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \overline{\Phi}_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{1.27}$$

Если Φ_1 не зависит от ξ и $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение, в котором ξ является параметром.

В линейном случае уравнение (1.27) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f, \tag{1.28}$$

где a, b, c и f — известные функции от ξ и η. Дальнейшее упрощение этого уравнения достигается подстановкой

$$u = ve^{\frac{1}{2}\int b(\xi,\eta)\,d\eta}.$$

Для v получим уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial v}{\partial \xi} + c_1 v + f_1, \tag{1.29}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{4}b^2 + c + \frac{a}{2}\int \frac{\partial b}{\partial \xi}\,d\eta - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial \eta}, \quad f_1 = fe^{-\frac{1}{2}\int b(\xi,\eta)\,d\eta}.$$

При постоянном $a > 0$ и $c_1 = 0$ получаем так называемое *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial v}{\partial \xi} + f_1; \tag{1.30}$$

при $f_1 \equiv 0$ получается однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial v}{\partial \xi}. \tag{1.31}$$

4. Каноническая форма уравнения эллиптического типа. В случае уравнения эллиптического типа целью преобразования независимых переменных является обращение в нуль коэффициента при смешанной производной.

Преобразование легко выполняется, если A, B, C — аналитические*) функции от x и y. Если $\delta < 0$, то коэффициенты

---

*) *Аналитической функцией* от x и y в некоторой области изменения этих переменных называется функция, которая в окрестности каждой точки (x_0, y_0) данной области разлагается в ряд по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$.

уравнений (1.18) при $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$ становятся комплексными сопряженными. Но тогда, как известно, интегралы этих уравнений также можно считать комплексно сопряженными и представить их в виде

$$\varphi_1(x, y) = \varphi^*(x, y) + i\varphi^{**}(x, y) = \text{const},$$
$$\varphi_2(x, y) = \varphi^*(x, y) - i\varphi^{**}(x, y) = \text{const},$$

где φ^* и φ^{**} — вещественные функции.

Можно сказать, что в этом случае характеристики уравнения комплексные и сопряженные. Полагая

$$\xi = \varphi^*(x, y), \quad \eta = \varphi^{**}(x, y), \tag{1.32}$$

легко показать, что якобиан этого преобразования не равен нулю ни в одной точке.

В новых переменных уравнение приводится к следующей канонической форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{1.33}$$

Если $\Phi_1 \equiv 0$, мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \tag{1.34}$$

называемое *уравнением Лапласа.*

Случай неаналитических коэффициентов гораздо сложнее. Будем подбирать переменные ξ, η, требуя, чтобы

$$\bar{A} = \bar{C},$$
$$\bar{B} = 0,$$

или в раскрытом виде:

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$
$$A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Эту систему уравнений можно преобразовать к следующей:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{B\frac{\partial \xi}{\partial x} + C\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC - B^2}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{A\frac{\partial \xi}{\partial x} + B\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Полученные уравнения называются *уравнениями Бельтрами*. Исключая одну из неизвестных функций, например η, получим уравнение для ξ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{A\frac{\partial\xi}{\partial x}+B\frac{\partial\xi}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{B\frac{\partial\xi}{\partial x}+C\frac{\partial\xi}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}=0.$$

Аналогично можно составить уравнение, определяющее η.

Известно, что уравнения Бельтрами имеют решение, если коэффициенты A, B, C — дважды дифференцируемые функции от x и y. Однако задача эффективного решения уравнений Бельтрами является довольно сложной.

5. Классификация нелинейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Рассмотрим общее нелинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right)=0 \qquad (*)$$

или

$$F\left(p, q, r, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right)=0,$$

где обозначено:

$$p=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad q=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Положим

$$A=\frac{\partial F}{\partial p}, \quad 2B=\frac{\partial F}{\partial q}, \quad C=\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Выбрав решение $u=u(x, y)$ уравнения $(*)$, вычислим в некоторой точке значения величин A, B, C и составим дискриминант

$$\delta=B^2-AC.$$

Условимся, так же как и для линейного уравнения, называть уравнение $(*)$ соответственно гиперболическим, параболическим или эллиптическим в выбранной точке в случае, когда $\delta>0$, $\delta=0$, $\delta<0$ соответственно. Однако A, B и C зависят не только от точки (x, y), но и от функции u и ее производных, и поэтому нельзя определить знак δ в какой-либо точке, не зная u как функцию от x, y, т. е. не зная решений. Следовательно, тип нелинейного уравнения зависит от того, какое решение рассматривается, и может быть разным для разных решений.

Линии $\varphi(x, y)=c$ называются *характеристиками* нелинейного уравнения, если они являются интегральными кривыми *характеристического* уравнения

$$A(dy)^2-2B\,dx\,dy+C(dx)^2=0.$$

Вид характеристик также зависит от выбора решения.

§ 3. Классификация и канонические формы уравнений второго порядка с n независимыми переменными

1. Аналог второй канонической формы. Рассмотрим уравнение, линейное относительно старших производных (т. е. относительно производных второго порядка) в случае, когда число независимых переменных больше двух:

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} = \Phi\left(x_1, \ldots, x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right). \qquad (1.35)$$

Произведем линейную замену независимых переменных:

$$\xi_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l, \quad k = 1,\ 2, \ldots,\ n. \qquad (1.36)$$

Примем, что преобразование неособое, т. е. определитель $|a_{ik}| \neq 0$, что обеспечит однозначность определения x_i через ξ_i (см. *СМБ*, Высшая алгебра, стр. 52).

Уравнение приведется к виду

$$\sum_{k,\,l=1}^{n}\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}a_{ki}a_{lj}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_k\,\partial\xi_l} = \Phi_1\left(\xi_1, \ldots, \xi_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right), \qquad (1.37)$$

где A_{ij} уже функции $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

При замене переменных (1.36) коэффициенты при вторых производных в уравнении (1.35) изменяются так же, как коэффициенты квадратичной формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}t_i t_j; \qquad (1.38)$$

заметим, что эти коэффициенты, вообще говоря, различны в различных точках пространства координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Известно, что существуют такие неособые преобразования, которые приводят квадратичную форму к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{m} (\pm\tau_i^2), \qquad m \leqslant n, \qquad (1.39)$$

причем число положительных и отрицательных членов, а также само число m не зависят от выбора неособого преобразования.

Выбрав надлежащее преобразование, мы приведем уравнение к следующему каноническому виду:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\pm\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2}\right)=\Phi_1\left(\xi_1,\ldots,\xi_n,u,\frac{\partial u}{\partial \xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right), \tag{1.40}$$

характеризующемуся отсутствием смешанных производных. Для каждой точки будут свои значения коэффициентов квадратичной формы и свое преобразование к каноническому виду. В общем случае невозможно преобразовать уравнение к канонической форме в какой-либо (даже малой) области. Переход от линейного преобразования (1.36) к любому более общему преобразованию независимых переменных также не дает возможности привести уравнение (1.35) к каноническому виду сразу для всех точек какой-либо (даже малой) области.

Конечно, если коэффициенты A_{ij} постоянны, то приведение к канонической форме обеспечивает каноническую форму при всех значениях независимых переменных.

Классификация уравнений в фиксированной точке определяется квадратичной формой (1.38) или, что то же, видом канонической формы (1.39).

а) Уравнение называется *эллиптическим* в данной точке, если $m=n$ и все знаки в левой части равенства (1.40) одинаковы (без ущерба для общности их можно считать положительными).

б) Уравнение называется *гиперболическим* в данной точке, если $m=n$ и все знаки в левой части равенства (1.40) одинаковы, кроме одного.

в) Уравнение называется *ультрагиперболическим* в данной точке, если $m=n$ и в левой части равенства (1.40) имеется больше одного положительного и больше одного отрицательного знака.

г) Уравнение называется *параболическим в широком смысле*, если $m<n$.

д) Уравнение называется *параболическим в узком смысле*, если $m=n-1$, все знаки слева в уравнении (1.40) одинаковы и правая часть уравнения содержит производную $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$, так что

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)} \neq 0.$$

Примеры. Уравнение Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

— эллиптического типа. Дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

называется *оператором Лапласа*. Волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

принадлежит к гиперболическому типу; уравнение теплопроводности

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

— параболическое в узком смысле. Примером ультрагиперболического уравнения может служить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0;$$

примером уравнения, параболического в широком смысле, — уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Уравнения ультрагиперболические и параболические в широком смысле редко встречаются в приложениях.

2. Аналог первой канонической формы. Изложенное выше преобразование уравнений к каноническому виду заключалось в уничтожении коэффициентов при всех смешанных производных.

Часто требуется преобразование, обращающее в нуль коэффициент при какой-либо несмешанной производной.

Пусть переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заменены переменными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, где ξ_i суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем в свою очередь x_i суть однозначные функции от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. После преобразования уравнения (1.35) к новым переменным коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$ будет равен

$$\overline{A}_{11} = \sum_{i,\, j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j}.$$

Напишем уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0, \tag{1.41}$$

называемое *уравнением характеристик* уравнения (1.35). Поверхность

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}, \tag{1.42}$$

где φ — любой интеграл уравнения (1.41), называется *характеристической поверхностью* или просто *характеристикой* уравнения (1.35); в случае двух независимых переменных говорят о характеристической линии. Перейдя от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, где $\xi_1 = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, мы добьемся того, что коэффициент $\overline{A}_{11}$ обратится в нуль.

3. Классификация нелинейных уравнений второго порядка с n независимыми переменными. Такие уравнения имеют вид

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}) = 0, \tag{1.43}$$

где

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad p_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = p_{ji}.$$

Положим

$$A_{ii} = \frac{\partial F}{\partial p_{ii}}, \quad A_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} = A_{ji} \tag{1.44}$$

и составим квадратичную форму (1.38). Коль скоро эта форма составлена, классификация уравнений вида (1.43) по типам производится так же, как и в линейном случае. Важно отметить, что, как и в случае двух независимых переменных, тип нелинейного уравнения в каждой точке зависит, вообще говоря, от рассматриваемого решения.

§ 4. Задача Коши

1. Постановка задачи. В подавляющем большинстве задач математической физики требуется найти решение уравнений, удовлетворяющее некоторым дополнительным данным. Эти дополнительные условия весьма различны по характеру и зависят от постановки физической задачи, приводящей к данным уравнениям. Характерные для каждого типа уравнений дополнительные условия будут рассматриваться в соответствующих главах.

Следует указать, что при всем разнообразии видов дополнительных условий эти последние чаще всего таковы: некоторые производные от искомого решения (часто и само решение) должны принимать заданные значения на заданных поверхностях (линиях в случае двух независимых переменных). Такие дополнительные условия обычно называются *краевыми*; задача интегрирования дифференциального уравнения при заданных краевых условиях называется *краевой задачей*.

Одной из важнейших краевых задач математической физики является *задача Коши*. Изложим постановку этой задачи для простейшего случая — для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, линейного относительно старших производных (уравнение (1.3)).

Зададим в плоскости x, y некоторую кривую L_0, точки которой будем обозначать (x_0, y_0). Пусть параметрические уравнения этой кривой будут

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0(s). \tag{1.45}$$

Можно считать, что s есть длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки. Кривую L_0 предположим гладкой, так что функции $x_0(s)$ и $y_0(s)$ непрерывно дифференцируемы.

Пусть вдоль кривой L_0 заданы некоторые функции $f(s)$ и $g(s)$. Задача Коши для уравнения (1.3) состоит в следующем: в окрестности кривой L_0 требуется найти интеграл этого уравнения $u(x, y)$, удовлетворяющий так называемым *условиям Коши*

$$u\Big|_{L_0}=f(s),\quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{L_0}=g(s), \tag{1.46}$$

где l — данное направление, вообще говоря свое в каждой точке кривой L_0 и ни в одной точке не касательное к этой кривой *). Функции $f(s)$ и $g(s)$ называются *данными Коши*.

Если функция $f(s)$ дифференцируема, то на кривой L_0 можно определить первые производные искомой функции из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{x})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{y})=f'(s),\\ \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{x})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{y})=g(s), \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

где $\boldsymbol{s}$ — направление касательной к L_0; определитель системы (1.47), равный $\sin(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{l})$, отличен от нуля.

С геометрической точки зрения условия Коши определяют аппликаты интегральной поверхности и касательные плоскости к ней вдоль кривой L, лежащей на интегральной поверхности и проектирующейся на кривую L_0.

Допустим, что функции $x_0(s)$, $y_0(s)$, $f(s)$, $g(s)$ дифференцируемы столько раз, сколько это понадобится. Тогда по данным Коши можно попытаться вычислить на кривой L_0 значения старших производных от искомой функции. Для вторых производных получается линейная система

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx_0}{ds}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{dy_0}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{dx_0}{ds}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy_0}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ &A(x_0,\ y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x_0,\ y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x_0,\ y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\\ &\qquad=\Phi\left(x_0,\ y_0,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ u\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

Для того чтобы эта система трех уравнений однозначно определяла три искомые величины, необходимо и достаточно,

---

*) О производной по данному направлению см. *СМБ*, Дифференцирование и интегрирование, 1961, стр. 63.

чтобы определитель системы

$$\delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ \frac{dx_0}{ds} & \frac{dy_0}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx_0}{ds} & \frac{dy_0}{ds} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Дифференцируя по s равенства (1.48), можно составить уравнения для определения производных от u любого порядка. Условием однозначной разрешимости этих уравнений по-прежнему остается условие $\delta \neq 0$, которое означает, что кривая L_0 не является характеристикой данного уравнения.

Если коэффициенты уравнения, а также функции (1.45) и (1.46) аналитические, то решение можно определить в виде ряда Тейлора

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial x_0^m \, \partial y_0^{n-m}} (x - x_0)^m (y - y_0)^{n-m}.$$

Можно доказать, что этот ряд сходится в некоторой окрестности кривой L_0 и определяет единственное решение задачи Коши, — в этом состоит, для рассмотренного здесь класса уравнений, известная теорема Коши — Ковалевской.

2. Задача Коши и теорема Коши — Ковалевской для более общего случая. Будем говорить об уравнениях второго порядка с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, будем называть *поверхностью* в пространстве n переменных.

Задача Коши. В окрестности данной поверхности S требуется найти интеграл данного дифференциального уравнения, если во всех точках поверхности S заданы значения как самого искомого решения, так и его производной по какому-либо направлению, не касательному к поверхности.

Задача Коши, вообще говоря, не имеет решения, если поверхность S оказывается характеристической для данного уравнения, так как уравнение характеристической поверхности связывает значения искомой функции на этой поверхности со значениями производной по не касательному направлению и нельзя задать каждую из этих величин независимо.

Теорема Коши — Ковалевской. Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка. Выделим одну из независимых переменных, обозначив ее через t (в задачах физического характера такой выделяемой независимой переменной обычно является время). Предположим, что данное уравнение разрешимо относительно производной $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и, следовательно, может быть приведено к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}\right); \tag{1.49}$$

уравнение (1.49) может быть и нелинейным.

На поверхности $t = t_0$, где t_0 — некоторая постоянная, зададим начальные условия

$$\left. u \right|_{t=t_0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$
$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{1.50}$$

Поверхность $t = t_0$ не характеристическая — в противном случае уравнение (1.49) не содержало бы члена $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

В пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ рассмотрим некоторую точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$. Формулы (1.50) позволяют вычислить в этой точке в момент времени t_0 значения искомой функции u и всех ее производных, входящих в правую часть уравнения (1.49); эти значения будем обозначать нуликом. Так, например,

$$u_0 = \varphi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_0 = \varphi_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0),$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}\right)_0 = \psi_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0).$$

Теорема Коши — Ковалевской утверждает, что если F, φ, ψ — аналитические функции своих аргументов при значениях этих аргументов, близких соответственно к

$$t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, u_0, \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}\right)_0,$$

то задача Коши (1.49) — (1.50) имеет аналитическое решение в окрестности точки $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$. Это решение — единственное в классе аналитических функций.

Теорема Коши — Ковалевской распространяется на широкий класс уравнений и систем уравнений в частных производных любого порядка. Подробно об этом см. [1].

3. Корректность задач математической физики. Будем называть краевую задачу *корректной*, если существует одно и только одно решение уравнения, удовлетворяющее заданным краевым условиям, и если малым изменениям данных функций, входящих в краевые условия, соответствуют малые изменения решения (иначе говоря, если решение непрерывно зависит от краевых данных). Последнее требование необходимо для того, чтобы теоретические результаты, полученные решением краевой задачи, можно было использовать в практических приложениях, в которых краевые данные на самом деле известны лишь с той точностью, которую могут обеспечить наши измерительные приборы. В случае корректной задачи возможные погрешности в определении краевых условий не обесценивают найденных решений, приводя лишь к незначительным количественным отклонениям теоретического решения от экспериментальных результатов.

Понятие корректности предполагает возможность оценки «близости» двух функций. Существуют различные критерии такой близости. Приведем один пример.

Пусть заданные на поверхности S функции φ_i непрерывны вместе со своими производными до некоторого порядка k включительно, и пусть эти функции входят в качестве данных в краевые условия некоторой краевой задачи.

Относительно искомой функции предположим, что она непрерывна вместе со своими производными до порядка p включительно.

Будем говорить, что зависимость от начальных данных непрерывна с порядком (p, k), если фиксированной произвольной системе положительных чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ всегда соответствует такая система положительных чисел $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k$, что неравенства

$$|u^* - u| < \varepsilon_0,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$|u^{*(p)} - u^{(p)}| < \varepsilon_p$$

становятся справедливыми, как только выполняются неравенства

$$|\varphi_i^* - \varphi_i| < \delta_0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$|\varphi_i^{*(k)} - \varphi_i^{(k)}| < \delta_k.$$

Символами $u^{(p)}$, $\varphi_i^{(k)}$ обозначены все частные производные соответствующего порядка.

4. Пример некорректной задачи (пример Адамара). Найдем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в полуполосе $y > 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ при следующих дополнительных условиях:

$$u\Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = u\Big|_{x=+\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$u\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \varphi(x)$$

$$\left(\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right).$$

Если положить $\varphi(x) = 0$, то единственным решением задачи будет $u(x, y) \equiv 0$. Если же положить $\varphi^*(x) = e^{-\sqrt{2n+1}} \cos(2n+1)x$, то единственным решением будет

$$u^* = \frac{1}{2n+1} e^{-\sqrt{2n+1}} \cos(2n+1)x \operatorname{sh}(2n+1)y.$$

Легко проверить, что функция φ^* и все ее производные при достаточно большом n сколь угодно мало отличаются от нуля. В то же время u^* при всяком постоянном y, отличном от нуля, имеет вид косинусоиды со сколь угодно большой амплитудой, следовательно, при достаточно большом n сколь угодно отличается от нулевого решения.

ГЛАВА II

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Понятие о гиперболическом уравнении второго порядка. Простейшие примеры гиперболических уравнений

1. Определение. Уравнение

$$u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n} 2A_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_i}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+B_0\frac{\partial u}{\partial t}+Cu=D, \qquad (2.1)$$

где A_{ij}, A_{0i}, B_i, C и D — функции от x_j ($j=1, 2, \ldots, n$) и t, называется *t-гиперболическим* в некоторой области G пространства $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если выполняется следующее условие: каждая проходящая через начало координат в действительном пространстве $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ прямая должна пересекать поверхность

$$1=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\,\alpha_i\alpha_j+\sum_{i=1}^{n} 2A_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n)\,\alpha_i \qquad (2.2)$$

в двух действительных точках [19].

Пусть уравнение второго порядка имеет вид

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=0}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=D. \qquad (2.3)$$

Здесь A_{ij}, B_i, C, D — функции от x_0, $x_1, \ldots, x_n$. Уравнение (2.3) называется *гиперболическим в некоторой точке*

$(x_0, \ldots, x_n)$, если в этой точке каноническая форма матрицы $\|A_{ij}\|$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

причем ни одно из λ_i не равно нулю и знак одного из λ_i противоположен знаку остальных [19], [23, т. IV], [28], [29]; см. также гл. I, § 3 настоящего выпуска. Эти два определения согласованы в том смысле, что каждое t-гиперболическое уравнение в каждой точке гиперболично в смысле второго определения и, наоборот, всякое уравнение, гиперболическое в смысле второго определения, при A_{ij} непрерывных в окрестности точки $M(x_0, \ldots, x_n)$ обладает тем свойством, что всегда найдется такая система координат $t, y_1, \ldots, y_n$, что это уравнение будет t-гиперболично в некоторой окрестности точки M.

Важным примером гиперболического (t-гиперболического) уравнения является уравнение

$$u_{tt} - \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(t, x_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = D, \quad (2.4)$$

где A_{ij} — положительная квадратичная форма, а $x_0 \equiv t$. Если уравнение (2.3) гиперболическое с постоянными коэффициентами, то заменой переменных и искомой функции его всегда можно привести к виду

$$u_{tt} - \Delta u + C_1 u = D_1(t, y_1, \ldots, y_n). \quad (2.5)$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ — оператор Лапласа, $C_1 = \mathrm{const}$ [23, т. IV], [28], [29].

При $C_1 = 0$ уравнение (2.5) называется *волновым* (ср. стр. 24, 55).

Гиперболический тип имеют многие уравнения, встречающиеся в математической физике, например уравнения колебаний струны, мембраны и уравнения распространения звука (см. пп. 2, 3, 4 настоящего параграфа).

В теории гиперболических уравнений часто приходится иметь дело с обобщенными решениями этих уравнений, определенными на стр. 18.

В том случае, когда u имеет непрерывные производные второго порядка, понятия решения в обычном смысле и обобщенного решения совпадают.

Существуют и другие определения обобщенного решения [7], [8], [16], [19].

2. Уравнение колебаний струны [23, т. II], [28], [29]. Пусть в невозмущенном состоянии струна располагается вдоль оси Ox. Ее изгиб мы будем характеризовать вертикальным смещением $u(t, x)$ точки x в момент времени t. Натяжение струны обозначим через $p(x)$, упругую восстанавливающую силу — через $q(x)$, через $\rho(x)$ — линейную плотность, $\Phi(x, t)$ означает проекцию на ось Ou силы, действующей на единицу длины струны. В предположении малости колебаний имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\,u + \Phi(x, t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (2.6)$$

Если конец $x = a$ струны закреплен, то соответствующее краевое условие имеет вид $u\big|_{x=a} = 0$; если конец $x = a$ струны свободен, то $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$.

3. Уравнение колебаний мембраны [23, т. II], [28], [29]. Если $p(x, y)$ — натяжение тонкой мембраны, $u(t, x, y)$ — вертикальное смещение точки (x, y) в момент времени t, $\Phi(t, x, y)$ — проекция на вертикальную ось Ou силы, действующей на единицу площади мембраны, то в предположении малости колебаний имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \Phi(x, y, t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (2.7)$$

Если край S мембраны свободен, то $\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}\right|_S = 0$, где $\mathbf{v}$ — вектор нормали к контуру S; если он закреплен, то $u\big|_S = 0$.

4. Уравнение распространения звука [28], [29]. Звук представляет собой малые колебания газа или жидкости, т. е.

колебания, когда в некоторой точке (x, y, z) пространства в момент времени t давление $p(x, y, z, t)$ близко к некоторому среднему значению $p_0 = \text{const}$, а плотность $\rho(x, y, z, t)$ — к $\rho_0 = \text{const}$. Пусть жидкость или газ баротропны, т. е. плотность есть однозначная функция давления:

$$\rho = f(p).$$

Пусть, далее, к бесконечно малому объему dV жидкости или газа приложена сила $F(x, y, z, t)\,dV$. Тогда имеет место уравнение

$$\Delta p - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Phi,$$

где

$$\Phi = \operatorname{div} F, \quad \frac{1}{a^2} = f'(p_0). \tag{2.8}$$

§ 2. Гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными *)

1. Уравнение колебаний струны (метод Даламбера) [23, т. II], [28], [29]. В случае $p(x) = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ уравнение колебаний струны имеет вид (см. § 1)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \tag{2.9}$$

$$a = \frac{p}{\rho}, \quad f = \frac{1}{\rho}\Phi.$$

Любая функция, удовлетворяющая уравнению (2.9) при $f \equiv 0$, допускает представление

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \tag{2.10}$$

называемое *решением Даламбера*. Если $u \in C^k$ **), то и $\varphi \in C^k$, $\psi \in C^k$.

Обратно, любая функция вида (2.10) является решением уравнения (2.9).

Решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = u_1(x) \tag{2.11}$$

---

*) См. также § 3.

**) Здесь C^k — класс функций с k непрерывными производными.

дается формулой

$$u(x, t) = \frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi. \quad (2.12)$$

Если решение задачи (2.11) ищется лишь при $x>0$, $t>0$, а при $x=0$ задано краевое условие

$$u\big|_{x=0} = 0 \text{ (струна закреплена в точке } x=0) \quad (2.13)$$

или

$$u_x\big|_{x=0} = 0 \text{ (конец } x=0 \text{ струны свободен)}, \quad (2.14)$$

то решение опять дается формулой (2.12), где в случае (2.13) $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(x, t)$ следует продолжить нечетным образом на всю ось Ox, т. е.

$$u_0(-x) = -u_0(x), \quad u_1(-x) = -u_1(x), \\ f(-x, t) = -f(x, t), \quad (2.15)$$

а в случае (2.14) — четным образом:

$$u_0(-x) = u_0(x), \quad u_1(-x) = u_1(x), \\ f(-x, t) = f(x, t). \quad (2.16)$$

Если решение задачи (2.11) ищется лишь на конечном отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ (струна имеет конечную длину l) при $t \geqslant 0$, а при $x=0$ и $x=l$ выполняются краевые условия

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \text{ (концы закреплены)} \quad (2.17)$$

или

$$u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l_0} = 0 \text{ (концы свободны)}, \quad (2.18)$$

то решение задачи (2.11), (2.17) или задачи (2.11), (2.18) опять дает формула (2.12), где в случае (2.17) u_0, u_1 и $f(x, t)$ следует продолжить на всю ось по закону нечетности и периодичности:

$$\left.\begin{aligned} &u_i(x+2l) = u_i(x), \; u_i(-x) = -u_i(x) \quad (i=0, 1), \\ &f(x+2l, t) = f(x, t), \quad f(-x, t) = -f(x, t), \end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

а в случае (2.18) — по закону четности и периодичности:

$$\left.\begin{aligned} &u_i(x+2l)=u_i(x), \quad u_i(-x)=u_i(x) \qquad (i=0,\ 1),\\ &\quad f(x+2l,\ t)=f(x,\ t), \quad f(-x,\ t)=f(x,\ t). \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Если $u(x,\ t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные второго порядка (в области $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ в случае полуограниченной струны или в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$ в случае струны ограниченной), удовлетворяет уравнению (2.9) и краевым условиям (2.13) или (2.14), то в случае краевого условия (2.13)

$$u_0(0)=0, \quad u_0''(0)a^2+f(0,\ 0)=0, \quad u_1(0)=0, \tag{2.21}$$

в случае краевого условия (2.14)

$$u_0'(0)=0, \quad u_1'(0)=0. \tag{2.22}$$

Аналогичные условия должны выполняться при $x=l$ (в случае ограниченной струны). Выписанные здесь условия (2.21) и (2.22) называются *условиями согласования*. Если $f \in C^1$, $u_0 \in C^2$ и $u_1 \in C^1$ (см. сноску на стр. 41) и выполнены условия согласования, то решение соответствующей задачи с начальными и краевыми условиями будет иметь непрерывные производные первого и второго порядка. Если начальные данные $u_0(x)$ и $u_1(x)$ и свободный член $f(x,\ t)$ имеют особенности или не выполняются условия согласования, то дважды непрерывно дифференцируемого решения рассматриваемых задач не существует. Формула (2.12) дает тогда обобщенное решение уравнения (2.19).

2. Общее гиперболическое уравнение второго порядка. Каскадный метод Лапласа [31]. Общее гиперболическое уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} &A(x,\ y)u_{xx}+2B(x,\ y)u_{xy}+C(x,\ y)u_{yy}+\\ &\quad +D(x,\ y)u_x+E(x,\ y)u_y+F(x,\ y)u=\varphi(x,\ y) \end{aligned} \tag{2.23}$$

заменой переменных может быть сведено к уравнению вида

$$\begin{aligned} Lu=u_{xy}+a(x,\ y)u_x+b(x,\ y)u_y+&\\ +c(x,\ y)u=f(x,\ y)& \end{aligned} \tag{2.24}$$

(стр. 22—23). Поэтому далее в настоящем параграфе мы будем предполагать, что гиперболическое уравнение имеет вид (2.24).

В некоторых случаях можно построить формулы, позволяющие найти все решения уравнения (2.24), аналогично тому как формула Даламбера (2.10) дает все решения уравнения (2.9). Метод получения этих формул, излагаемый здесь, называется *каскадным методом Лапласа.*

Может случиться, что имеет место тождество

$$h \equiv \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c \equiv 0, \tag{2.25}$$

тогда уравнение (2.24) запишется в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} + bv = f, \tag{2.26}$$

где

$$v = \frac{\partial u}{\partial y} + au, \tag{2.27}$$

откуда

$$u = e^{-\int a\,dy}\left[X + \int\left\{Y + \int f e^{\int b\,dx}\,dx\right\} e^{\int a\,dy - b\,dx}\,dy\right], \tag{2.28}$$

где X и Y — произвольные функции соответственно от x и от y. Аналогично при

$$k \equiv \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c \equiv 0 \tag{2.29}$$

получаем

$$u = e^{-\int b\,dx}\left[Y + \int\left\{X + \int f e^{\int a\,dy}\,dy\right\} e^{\int b\,dx - a\,dy}\,dx\right]. \tag{2.30}$$

В случае $h \not\equiv 0$ рассматривается некоторое новое, аналогичное (2.24), уравнение:

$$L_1 u_1 \equiv \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} + a_1 \frac{\partial u_1}{dx} + b_1 \frac{\partial u_1}{dy} + c_1 u_1 = f_1, \tag{2.31}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 = a - \frac{\partial \ln h}{\partial y}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - b\frac{\partial \ln h}{\partial y}, \\ f_1 = f\cdot\left(a - \frac{\partial \ln h}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Если функцию u_1 удается найти, то решение исходного уравнения (2.16) определяется по формуле

$$u = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x} + bu_1 - f}{h}. \tag{2.33}$$

Для уравнения (2.31)

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \ln h}{\partial x\, \partial y}, \quad k_1 = h. \tag{2.34}$$

Если $h_1 = 0$, то функция u_1 получается описанным выше приемом; если же $h_1 \neq 0$, то продолжаем процесс дальше: строим, как и выше, уравнение $L_2 u_2 = f_2$ и т. д. В случае $k \neq 0$ можно строить аналогичную цепочку уравнений: $L_{-1}u_{-1} = f_{-1}$, $L_{-2}u_{-2} = f_{-2}$ и т. д.

Если на каком-нибудь шаге h_i (или k_i) обратится в нуль, общее решение уравнения (2.16) удается найти.

Этим путем, например, находится общее решение уравнения Эйлера—Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\beta' u_x}{x-y} + \frac{\beta u_y}{x-y} = 0, \tag{2.35}$$

если хотя бы одно из чисел β или β' целое:

$$a(x, y) = -\frac{\beta'}{x-y}, \quad b(x, y) = \frac{\beta}{x-y},$$

$$c(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

$$h = \frac{\beta'(1-\beta)}{(x-y)^2}, \quad h = 0 \text{ при } \beta = 1;$$

если $h \neq 0$, то находим:

$$a_1 = -\frac{2+\beta'}{x-y}, \quad b_1 = \frac{\beta}{x-y}, \quad c_1 = -\frac{\beta'+\beta}{(x-y)^2},$$

отсюда

$$h_1 = \frac{(2-\beta)(1+\beta')}{(x-y)^2},$$

т. е.

$$h_1 = 0 \text{ при } \beta = 2 \text{ и т. д.}$$

3. Метод Римана [23, т. IV], [28], [29], [31]. Пусть гладкая кривая l задается явным уравнением $y = f(x)$, причем $f'(x) \neq 0$.

Требуется найти решение уравнения (2.24), удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} & u(x, y)|_{y=f(x)} = \omega(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=f(x)} = \varphi(x); \\ & \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=f(x)} = \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

где $\omega(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, причем

$$\omega'(x)=\varphi(x)+\psi(x)f'(x). \tag{2.37}$$

Задача отыскания функции $u(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (2.24), по начальным данным (2.36) есть задача Коши (см. стр. 32).

Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$u|_{x=x_1}=\varphi(y), \quad u|_{y=y_1}=\psi(x) \quad (\varphi(y_1)=\psi(x_1)), \tag{2.38}$$

$\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — заданные функции. Задача отыскания функции $u(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (2.24) и условиям (2.38), называется *задачей Гурса*.

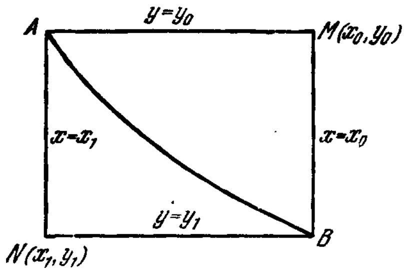

Рис. 1.

Решение задачи Коши (2.24), (2.36) при некоторых ограничениях типа гладкости на a, b, c, f, φ, ψ, ω существует и единственно, причем значение решения в точке $M(x_0, y_0)$ (рис. 1) зависит только от значений ω, φ и ψ на дуге AB и значений $f(x, y)$ в криволинейном треугольнике MAB. Решение задачи Коши зависит непрерывно от f, φ, ψ, ω.

Задача Гурса тоже всегда имеет одно и только одно решение. Решение в точке $M(x_0, y_0)$ зависит только от значений $\psi(x)$ на отрезке NB и $\varphi(y)$ на отрезке AN.

Если начальные условия задачи Коши (2.24), (2.36) имеют в точке A особенность, то решение задачи Коши будет иметь особенности вдоль прямых $x=x_1$ и $y=y_0$, параллельных координатным осям и пересекающихся в точке A (рис. 1). Так как прямые $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ являются характеристиками уравнения (2.24), то этот факт обычно выражают словами так: «разрывы распространяются вдоль характеристик».

Аналогично в случае задачи Гурса (2.24), (2.38) особенность функции $\varphi(y)$ в точке A (особенность функции $\psi(x)$ в точке B) приводит к особенности решения вдоль прямой $y=y_0$ (вдоль прямой $x=x_0$).

В тех случаях, когда гладкость начальных данных в задачах Коши (2.24), (2.36) и Гурса (2.24), (2.38) нарушается, дважды непрерывно дифференцируемых решений этих задач, вообще говоря, не существует и решение уравнения (2.24) следует понимать в обобщенном смысле.

Дифференциальный оператор

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - (av)_x - (bv)_y + cv \tag{2.39}$$

называют оператором, сопряженным (ср. (1.10)) оператору Lu (см. (2.24)). Решение $v(x, y, x_0, y_0)$ задачи Гурса

$$\left.\begin{aligned} M(v) = 0; \quad v|_{x=x_0} &= e^{\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, y)\,dy}; \\ v|_{y=y_0} &= e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(x, y_0)\,dx} \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

называется *функцией Римана* оператора L, соответствующей точке (x_0, y_0).

Функция Римана обладает следующим *свойством взаимности*: если $v(x_1, y_1, x_0, y_0)$ — значение в точке (x_1, y_1) функции Римана оператора L, соответствующей точке (x_0, y_0), то $v(x_0, y_0, x_1, y_1)$ — значение в точке (x_0, y_0) функции Римана оператора M, соответствующей точке (x_1, y_1).

Зная функцию Римана, можно записать решение задач Коши и Гурса в квадратурах:

а) задача Коши (2.24), (2.36)

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(uv)_A + \frac{1}{2}(uv)_B + \\ + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \left\{\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right] dx - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right] dy\right\} + \iint\limits_{\triangle AMB} fv\,dx\,dy; \end{aligned} \tag{2.41}$$

б) задача Гурса (2.24), (2.38)

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) = (uv)_N + \int\limits_N^A v(\varphi' + b\varphi)\,dx + \int\limits_N^B v(\psi' + a\psi)\,dy + \\ + \iint\limits_{\square NBMA} vf\,dx\,dy; \qquad v = v(x, y, x_0, y_0). \end{aligned}$$

Функции Римана некоторых операторов:

1) $$Lu = u_{xy}, \quad v \equiv 1 \text{ (см. [29]).} \tag{2.42}$$

2) $$Lu = u_{xy} + cu, \quad c = \text{const},$$
$$v = J_0\left(\sqrt{4c(x_0 - x)(y_0 - y)}\right) \text{ (см. [29]).} \tag{2.43}$$

3) $$Lu = u_{xy} - \frac{\beta'}{x - y} u_x + \frac{\beta}{x - y} u_y,$$
$$v = (x - y)^{\beta + \beta'} (x_0 - y)^{-\beta} (x - y_0)^{-\beta'} \times$$
$$\times F\left(\beta, \beta'; 1; \frac{(x_0 - x)(y_0 - y)}{(y_0 - x)(x_0 - y)}\right) \text{ (см. [31]).} \tag{2.44}$$

4) $$Lu = u_{xy} - \frac{1}{4} \frac{u}{(x - y)^2},$$
$$v = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{(x_0 - y_0)(x - y)}\right) \text{ (см. [11]).} \tag{2.45}$$

5) $$Lu = u_{xy} - \frac{1}{4} \frac{u}{\sin^2(x - y)},$$
$$v = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{\sin(x - x_0)\sin(y - y_0)}{\sin(x_0 - y_0)\sin(x - y)}\right) \text{ (см. [11]).} \tag{2.46}$$

Сопряженным оператором для оператора (2.44) является

$$L^* u = u_{xy} + \frac{\beta'}{x - y} u_x - \frac{\beta}{x - y} u_y - \frac{\beta + \beta'}{(x - y)^2} u. \tag{2.47}$$

Пользуясь теоремой взаимности для функции Римана, можно получить функцию Римана и в этом случае.

6) $$Lu = u_{xy} - \frac{\beta}{x + y}(u_x + u_y), \tag{2.48}$$
$$v = \left(\frac{x_0 + y_0}{x + y}\right)^{\beta} F\left(1 + \beta, -\beta; 1; -\frac{(x_0 - x)(y_0 - y)}{(x + y)(x_0 + y_0)}\right)$$
$$\text{(см. [33]).} \tag{2.49}$$

§ 3. Метод Фурье в случае двух переменных

1. Разложение по собственным функциям уравнения Штурма—Лиувилля [17], [19], [23, т. IV], [30, т. I].

Определения. Дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y, \tag{2.50}$$

где p, p', q непрерывны, $p \geqslant \text{const} > 0$, называется *дифференциальным оператором Штурма—Лиувилля.*

Краевые условия

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 y + \alpha_2 y'|_{x=a} = 0, & \beta_1 y + \beta_2 y'|_{x=b} = 0, \\ |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, & |\beta_1| + |\beta_2| > 0, \end{array}\right\} \tag{2.51}$$

называются *краевыми условиями типа Штурма—Лиувилля.*

Функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$Ly = -\lambda\rho(x)y \tag{2.52}$$

($\rho(x)$ — непрерывная функция, положительная при $a \leqslant x \leqslant b$), краевым условиям (2.51) и тождественно не равная нулю, называется *собственной функцией* уравнения Штурма — Лиувилля.

Число λ называется *собственным числом.* Одному собственному числу отвечает одна собственная функция с точностью до постоянного множителя.

Собственная функция $y(x)$ называется *нормированной*, если

$$\int_a^b \rho(x) y^2(x)\, dx = 1. \tag{2.53}$$

Собственные функции y_1, y_2, отвечающие различным собственным значениям, *ортогональны*:

$$\int_a^b \rho(x) y_1 y_2\, dx = 0. \tag{2.54}$$

Все собственные числа вещественны. Они образуют счетное множество на вещественной оси с единственной точкой сгущения при $\lambda = +\infty$. В частности, отрицательных собственных значений всегда конечное число. Когда

$$q(x) \geqslant 0, \quad \alpha_1\alpha_2 \leqslant 0, \quad \beta_1\beta_2 \geqslant 0, \tag{2.55}$$

отрицательных собственных значений нет.

Если $q \equiv 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, то собственным значением будет $\lambda = 0$, собственной функцией будет постоянная. В остальных случаях при выполнении условий (2.55) все собственные значения положительны.

Если $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, то при $n \to +\infty$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} + O(1), \quad l = \int_a^b \sqrt{\frac{\rho}{p}}\, dx. \tag{2.56}$$

При краевых условиях

$$y|_{x=a}=y|_{x=b}=0 \tag{2.57}$$

для n-й нормированной собственной функции $y_n(x)$ имеет место асимптотическая формула [23, т. IV]

$$\left.\begin{aligned} y_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{\sqrt[4]{p\rho}}\sin\frac{n\pi}{l}\left(\int_a^x \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx\right)+O\left(\frac{1}{n}\right), \\ l &= \int_a^b \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

Асимптотические формулы для собственных функций более общих краевых задач см. в [17].

Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке (a, b). *Рядом Фурье* функции $f(x)$ по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля называется ряд

$$\left.\begin{gathered} f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i(x), \\ c_i = \int_a^b f(x)\rho(x) y_i(x)\,dx, \quad \int_a^b y_i^2 \rho(x)\,dx = 1. \end{gathered}\right\} \tag{2.59}$$

Если $f(x)$ квадратично интегрируема на (a, b), то ряд (2.59) сходится к ней в смысле среднего квадратичного, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \rho(x)\left[f(x)-\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\right]^2 dx = 0, \tag{2.60}$$

и выполняется *уравнение замкнутости*

$$\int_a^b \rho(x)|f(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{+\infty}|c_i|^2. \tag{2.61}$$

Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то при $a < x < b$ и $p=\rho=1$ ряд Фурье (2.59) сходится к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ [30, т. I].

В случае, когда $f(x)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет краевым условиям (2.51), ряд Фурье (2.59) сходится к $f(x)$ *регулярно* (т. е. ряд из абсолютных величин сходится равномерно [23, т. IV]). В случае $p\equiv 1$, $\rho\equiv 1$ при $a<x<b$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) - S_n(x)\right)=0, \tag{2.62}$$

где при $\alpha_2=\beta_2=0$ функция $S_n(x)$ — частная сумма ряда Фурье $f(x)$ по синусам $\left(\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right)$, а при $\alpha_2\neq 0$ и $\beta_2\neq 0$ — по косинусам $\left(\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right)$ [17], [30, т. I]. Равенство (2.62) называется *теоремой о равносходимости.* Общий случай сводится к случаю $p\equiv 1$, $\rho\equiv 1$ с помощью подстановки

$$\xi=\int_a^x\sqrt{\frac{\rho}{p}}\,dx,\quad v=\sqrt[4]{\rho p}\,y \quad [23,\ \text{т. IV}]. \tag{2.63}$$

2. Метод Фурье в случае ограниченной струны (смешанная задача для уравнения струны) [19], [23, т. IV], [28], [29]. Здесь мы будем рассматривать уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}(pu_x)+q(x)u=\rho u_{tt}-Lu=f(x,\ t), \tag{2.64}$$

где функция $q(x)$ не обязательно положительна. Будем считать, что $p(x)\geqslant\text{const}>0$, $\rho(x)\geqslant\text{const}>0$, p, p', q и ρ непрерывны.

Пусть надо решить уравнение (2.64) в области $t\geqslant 0$, $a\leqslant x\leqslant b$, если выполнены краевые условия типа Штурма—Лиувилля

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha_1 u+\alpha_2 u_x|_{x=a}=0, & \beta_1 u+\beta_2 u_x|_{x=b}=0,\\ |\alpha_1|+|\alpha_2|>0, & |\beta_1|+|\beta_2|>0\end{array}\right\} \tag{2.65}$$

и начальные условия

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t|_{t=0}=u_1(x). \tag{2.66}$$

Задача (2.64), (2.65), (2.66) называется *смешанной задачей* для уравнения (2.64). Решение задачи (2.64), (2.65), (2.66) можно записать в виде ряда по собственным функциям уравнения Штурма—Лиувилля

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}+C_n(t)\right]y_n(x). \tag{2.67}$$

Здесь y_n — n-я нормированная собственная функция уравнения Штурма—Лиувилля,

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\int_a^b\rho(x)u_0(x)y_n(x)dx,\quad B_n=\int_a^b\rho(x)\,u_1(x)\,y_n(x)\,dx,\\ C_n&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\ d\tau\int_a^b f(x,\ \tau)y_n(x)\,dx.\end{aligned}\right\}\tag{2.68}$$

Пусть $f\equiv 0$. Если функция u имеет две непрерывные производные и удовлетворяет уравнению (2.64), краевым и начальным условиям (2.65) и (2.66), то обязательно

$$\alpha_1u_0+\alpha_2u_0'\,|_{x=a}=0,\quad \beta_1u_0+\beta_2u_0'\,|_{x=b}=0,$$
$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_1'\,|_{x=a}=0,\quad \beta_1u_1+\beta_2u_1'\,|_{x=b}=0,$$

и если $\alpha_2=0$, то

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,u_0')-q(x)\,u_0\,|_{x=a}=0;$$

если $\beta_2=0$, то

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,u_0')-q(x)\,u_0\,|_{x=b}=0.$$

Эти условия называются *условиями согласования* (ср. стр. 43). Пусть выполнены условия согласования, и пусть u_0 имеет три непрерывные производные, а u_1 — две непрерывные производные. Тогда ряд (2.67) допускает двукратное почленное дифференцирование и дает классическое решение задачи (2.64), (2.65), (2.66). Если гладкость u_0, u_1 меньше, чем указано, или не выполняются условия согласования, то ряд может сходиться к разрывной функции и давать только обобщенное решение (см. § 1 гл. I) уравнения $\rho(x)\,u_{tt}-Lu=0$. См. также [19], [23, т. IV].

3. Более общая смешанная задача. Пусть $t=\mu(x)$ — гладкая кривая, в каждой точке которой

$$\left|\frac{d\mu}{dx}\right|<\sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}. \tag{2.69}$$

Такую кривую мы будем называть кривой, *ориентированной* пространственным образом.

Рассмотрим задачу (которую тоже называют смешанной)

$$F(x,\ t)+\frac{\partial}{\partial x}(p(x)u_x)-q(x)u=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (a\leqslant x\leqslant b), \tag{2.70}$$

$$\alpha_1 u+\alpha_2 u_x\,|_{x=a}=c(t),\quad \beta_1 u+\beta_2 u_x\,|_{x=b}=d(t), \tag{2.71}$$

$$u\,|_{t=\mu(x)}=u_0(x),\quad u_t\,|_{t=\mu(x)}=u_1(x). \tag{2.72}$$

Пусть $\delta(x-x_0)$ — δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке x_0 [7].

Фундаментальным решением смешанной задачи (2.70), (2.71), (2.72) называется решение $v(x,\ t,\ x_0,\ t_0)$ следующей смешанной задачи для $t<t_0$:

$$\left.\begin{aligned}&\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t}-Lv=0, && t<t_0,\\ &\alpha_1 v+\alpha_2 v_x\,|_{x=a}=0, && \beta_1 v+\beta_2 v_x\,|_{x=b}=0,\\ &v\,|_{t=t_0}=0, && \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\delta(x-x_0)\frac{1}{\rho(x_0)}.\end{aligned}\right\} \tag{2.73}$$

С помощью метода Фурье нетрудно получить формулу

$$v(x,\ t,\ x_0,\ t_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y_n(x_0)\,y_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t_0-t),\quad t<t_0. \tag{2.74}$$

Применяя формулу Грина к выражению

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ \mu(x)\leqslant t\leqslant t_0}}\left\{u(x,\ t)\left[\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}(p(x)v_x)+q(x)v\right]-\right.$$
$$\left.-v\left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}(pu_x)+qu\right]\right\}dx\,dt,$$

нетрудно получить, что

$$u(x_0,\ t_0) = \int\limits_{t=\mu(x)} [(vu_t - uv_t)\rho\, dx + (u_x v - uv_x)p\, dt] -$$
$$- \int\limits_{\mu(a)}^{t_0} p(a)(u_x v - uv_x)|_{x=a}\, dt + \int\limits_{\mu(b)} (u_x v - uv_x)|_{x=a}\, p(b)\, dt +$$
$$+ \iint\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ t \leqslant t_0}} v(x,\ t,\ x_0,\ t_0) F(x,\ t)\, dx\, dt. \qquad (2.75)$$

Интегрирование по кривой $t = \mu(x)$ здесь следует проводить слева направо. Из формул (2.71), (2.72), (2.73) следует, что формула (2.75) выражает решение задачи (2.70), (2.71), (2.72) через известные величины.

Формулой (2.75) следует пользоваться таким образом: надо подставить в (2.75) вместо v ряд (2.74) и результат его формального почленного дифференцирования по x и по t. После этого следует формально переменить порядок суммирования и интегрирования, что даст нам ряд, представляющий $u(x_0,\ t_0)$.

4. Случай уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -e(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(p(x)u_x) - q(x)u\right)f(t). \qquad (2.76)$$

Вся теория пп. 2 и 3 обобщается на уравнение (2.76). Решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -e(t)u_t + \left(\frac{\partial}{\partial x}(p(x)u_x) - q(x)u\right)f(t), \\ &t \geqslant 0,\ a \leqslant x \leqslant b, \\ &\alpha_1 u + \alpha_2 u_x|_{x=a} = 0, \quad \beta_1 u + \beta_2 u_x|_{x=b} = 0, \\ &u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{aligned}\right\} \qquad (2.77)$$

дает формула

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n T_{1n}(t) + B_n T_{2n}(t)) y_n(x). \qquad (2.78)$$

Здесь $y_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (2.51), (2.52) при $\rho = 1$,

$$A_n = \int\limits_a^b u_0(x) y_n(x)\, dx, \quad B_n = \int\limits_a^b u_1(x) y_n(x)\, dx,$$

T_{1n}, T_{2n} — решения дифференциального уравнения

$$T'' + e(t)\,T' + f(t)\,\lambda_n^2 T = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$T_{1n}|_{t=0} = 1, \quad T'_{1n}|_{t=0} = 0, \quad T_{2n}|_{t=0} = 0, \quad T'_{2n}|_{t=0} = 1.$$

Здесь λ_n — n-е собственное число задачи Штурма—Лиувилля. Тем же способом, как это сделано в п. 3, можно решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -e(t)\,u_t + \left(\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\,u_x) - q(x)\,u\right) f(t) + F(x, t) \quad (2.79)$$

при краевых условиях (2.71) и начальных условиях (2.72). Для этого следует построить (в виде ряда типа (2.74)) решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial e v}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\,v_x) - q(x)\,u\right) f(t),\\ &a \leqslant x \leqslant b, \qquad t \leqslant t_0,\\ &\alpha_1 v + \alpha_2 v_x|_{x=a} = 0, \quad \beta_1 v + \beta_2 v_x|_{x=b} = 0,\\ &v|_{t=t_0} = 0, \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \delta(x - x_0) \end{aligned}\right\} \quad (2.80)$$

и затем применить формулу Грина к интегралу

$$\iint\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b\\ \mu(x) \leqslant t \leqslant t_0}} u(x, t)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial e v}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(p v_x) - q v\right) f\right] - \\ - v\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial e u}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(p u_x) - q u\right) f\right] dx\,dt. \quad (2.81)$$

В результате получается формула, аналогичная формуле (2.75), решающая смешанную задачу (2.79), (2.71), (2.72).

§ 4. Волновое уравнение

[15], [19], [23, т. II, т. IV], [28], [29], [33]

1. Задача Коши. Волновым уравнением называется уравнение

$$\Box u = u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad a = \text{const} > 0. \quad (2.82)$$

Дифференциальный оператор

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{2.83}$$

называется *оператором Лоренца.*

Задача Коши (см. гл. I, § 4) состоит в нахождении решения $u(x_i, t)$ уравнения (2.82) по начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &\Box u = f(x_i, t) \qquad (t > 0), \\ &u|_{t=0} = u_0(x_i), \\ &u_t|_{t=0} = u_1(x_i). \end{aligned}\right\} \tag{2.84}$$

Фундаментальным решением задачи Коши называется решение задачи

$$\Box v = \delta(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.85}$$

$$v|_{t<0} = 0.$$

Фундаментальное решение задачи Коши для n нечетного имеет вид [33]

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}} a}\, \delta^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\left(a^2t^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right), \tag{2.86}$$

где δ есть δ-функция Дирака [7]. В случае n четного

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}} a} \left(a^2t^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)_+^{\lambda} \Bigg|_{\lambda = -\frac{n-1}{2}}. \tag{2.87}$$

Здесь через s_+^λ обозначена обобщенная функция, которая является аналитическим продолжением обычной функции, определенной при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и равной s^λ, когда $s > 0$, и нулю, когда $s < 0$ [7].

Решение задачи Коши (2.84) можно записать через фундаментальное решение задачи Коши в виде

$$
\begin{aligned}
u(x_1, \ldots, x_n, t) = & \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int u_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, v(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n, t)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int u_0(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, v(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n, t)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n + \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int f(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, v(t - \tau, x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n) \times \\
& \times d\tau\, d\xi_1 \ldots d\xi_n, \qquad t \geqslant 0. \qquad (2.88)
\end{aligned}
$$

Интегралы (2.88) понимаются в следующем смысле [7]: если n нечетное, то $\delta^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\gamma)$ заменяется через $\frac{\gamma^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$, затем интеграл аналитически продолжается в точку $-\frac{n-1}{2}$. В случае четного n интеграл понимается в смысле «конечной части» по Адамару [15], [36] или в смысле аналитического продолжения по параметру [7], [39].

Интегралы (2.88) можно выразить в терминах обычных интегралов. При этом получается [15], [23, т. II]:

$$
\begin{aligned}
u(t, x_1, \ldots, x_n) = & \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r T_r(u_0)\, dr + \\
& + \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{at} (a^2 t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} T_r(u_1)\, dr + \\
& + \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{t} d\tau \int_0^{a\tau} (a^2 \tau^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r\, T_r(f(x, t-\tau))\, dr.
\end{aligned}
\qquad (2.89)
$$

Здесь $T_r(\varphi)$ — усреднение функции φ по сфере радиуса r с центром в точке $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$T_r(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+\ldots+(x_n-\xi_n)^2=r^2} \varphi(x_1+\xi_1, \ldots, x_n+\xi_n)\, dS,$$

σ_n — площадь n-мерной сферы радиуса единица, равная $\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, где Γ — функция Эйлера; интегрирование ведется по $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Для того чтобы функция u, определяемая формулой (2.89), имела две непрерывные производные, достаточно, чтобы $u_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ имели $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ производных, а u_0 имела $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ производных *).

При $n=2$ и $n=3$ формула (2.89) сводится к формулам Пуассона:

при $n=2$

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2 \leqslant a^2t^2} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{a^2t^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2 \leqslant a^2t^2} \frac{u_0(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{a^2t^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \iiint\limits_{\substack{\sum_{i=1}^{2}(x_i-\xi_i)^2 \leqslant a^2(t-\tau) \\ 0 \leqslant \tau \leqslant t}} \frac{f(\tau, \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}; \qquad (2.90)$$

---

*) Символом $\left[\frac{n}{2}\right]$ обозначается целая часть числа $\frac{n}{2}$.

при $n=3$

$$u(t, x_1, x_2, x_3)=tT_{at}(u_1)+\frac{\partial}{\partial t}tT_{at}(u_0)+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\xi_i)^2\leqslant a^2t^2}\frac{f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\frac{r}{a}\right)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{r}. \quad (2.91)$$

2. Точечные источники колебаний [23, т. II], [24]. *Точечным источником колебаний интенсивности* $\omega(t)$ называется предел решений u_ε при $\varepsilon\to 0$ задач

$$\square u_\varepsilon=f_\varepsilon(x_i, t),$$

$$u_\varepsilon|_{t<0}=0,$$

где

$$f_\varepsilon(x_i, t)=0 \text{ при } r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\varepsilon^2 \qquad (n=2, 3)$$

и не меняет знака при $r<\varepsilon$, причем

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}f_\varepsilon(x_i, t)\,dx=\omega(t)$$

(dx — элемент объема).

Предельный переход дает:

при $n=2$

$$u=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon=\begin{cases}0, & r>at,\\ \dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{r}{a}}\frac{\omega(\tau)\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}, & r=\sqrt{x_1^2+x_2^2};\end{cases} \quad (2.92)$$

при $n=3$

$$u=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon=\begin{cases}0, & r>at,\\ \dfrac{\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r}, & r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.\end{cases} \quad (2.93)$$

3. Формула Кирхгофа [23, т. II], [28]. Пусть $u(t, x_1, x_2, x_3)$ — решение уравнения

$$\square u = f(t, x_1, x_2, x_3) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$
$$(x_1, x_2, x_3) \in D \tag{2.94}$$

(D — трехмерная область с гладкой границей) — функция, непрерывная со вторыми производными в открытой области $(-\infty < t < +\infty) \times D$ и с первыми производными в замкнутой области $(-\infty < t < +\infty) \times \bar{D}$. Тогда

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - [u]\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} dS +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_D \frac{[f]}{r} d\xi. \tag{2.95}$$

Здесь S — граница D, $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2}$, $[F(t, x_1, x_2, x_3)] = F\left(t - \frac{r}{a}, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)$, интегрирование проводится по ξ_1, ξ_2, ξ_3.

§ 5. Метод Фурье для многих независимых переменных [13], [16], [19], [23, т. IV], [28], [29]

Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства с гладкой границей S.

Нахождение решения $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ уравнения

$$u_{tt} - Lu = F(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad t \geqslant 0, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in D, \tag{2.96}$$

где

$$Lu = \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - C(x_1, \ldots, x_n)\, u,$$

по граничным условиям

$$u|_S = 0 \tag{2.97}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x_1, \ldots, x_n)\, u \Big|_S = 0, \tag{2.97'}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i), \tag{2.98}$$

и начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x_1, \ldots, x_n), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.99}$$

называется *смешанной задачей.*

Оператор Lu предполагается эллиптическим (см. гл. I, § 3):

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_i\alpha_j \geqslant c \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \qquad c = \text{const} > 0.$$

Если

$$Lv = -\lambda v, \qquad v \not\equiv 0, \tag{2.100}$$

и функция v удовлетворяет краевому условию (2.97) или (2.97′), то v называется *собственной функцией эллиптического оператора* L, а λ — соответствующим *собственным числом.* Для собственных функций эллиптического оператора развита теория, аналогичная теории собственных функций уравнения Штурма — Лиувилля (§ 2, [16]). Более подробно изучен тот случай, когда $L \equiv \Delta$, где Δ — оператор Лапласа [12], [18], [30, т. II].

При весьма общих предположениях относительно области D и коэффициентов A_{ij} доказано [16], что существует счетное множество собственных чисел, причем все они вещественны и имеют единственную точку сгущения на бесконечности.

Если краевое условие имеет вид (2.97) или (2.97′) при $\sigma \geqslant 0$ и, кроме того, $C \geqslant 0$, то отрицательных собственных значений нет. Единственный возможный случай, когда при этих условиях может появиться нулевое собственное значение, — это случай краевых условий (2.97′) при $\sigma \equiv 0$, причем нужно еще, чтобы $C \equiv 0$. Собственная функция при этом — тождественная постоянная.

Каждому собственному числу отвечает конечное число линейно независимых собственных функций. Собственные функции v_1 и v_2, отвечающие различным собственным числам, *взаимно ортогональны* в том смысле, что

$$\int_D v_1 v_2 \, dx = 0. \tag{2.101}$$

Если одному собственному числу отвечает несколько линейно независимых собственных функций $v_1, v_2, \ldots, v_l$, то их всегда можно заменить такими их линейными комбинациями

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 = v_1, \\ \tilde{v}_2 = c_{21}v_1 + v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{v}_l = c_{l1}v_1 + c_{l2}v_2 + \ldots + v_l, \end{cases} \tag{2.102}$$

что $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_l$ будут уже попарно ортогональными.

Итак, без ограничения общности можно считать, что собственные функции ортонормированы:

$$(v_i, v_j) = \int_D v_i v_j \, dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{2.103}$$

Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ абсолютно интегрируема по области D, то ее *рядом Фурье по собственным функциям оператора* L называется ряд

$$\left. \begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_n) \sim \sum_{s=1}^{+\infty} c_s v_s, \\ & c_s = \int_D f(x_1, \ldots, x_n) v_s(x_1, \ldots, x_n) \, dx. \end{aligned} \right\} \tag{2.104}$$

Если $f(x)$ квадратично интегрируема, то ряд (2.104) сходится к ней в смысле среднего квадратичного

$$\int_D \Big| f - \sum_{s=1}^{n} c_s v_s \Big|^2 dx \to 0 \qquad (n \to +\infty) \tag{2.105}$$

и имеет место формула замкнутости (формула Парсеваля)

$$\int_D |f|^2 \, dx = \sum_{s=1}^{+\infty} |c_s|^2. \tag{2.106}$$

При некоторых ограничениях гладкости на границу и на коэффициенты A_{ij} и σ ряд Фурье (2.104) сходится равномерно и допускает m-кратное почленное дифференцирование, если в случае краевого условия (2.97) f имеет $2m + 2\left[\frac{n}{2}\right]$ непрерывных производных и

$$f|_S = Lf|_S = \ldots = L^{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{m}{2}\right]} f|_S = 0. \tag{2.107}$$

В случае краевого условия (2.97′) ряд (2.104) сходится и допускает m-кратное почленное дифференцирование, если

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial N}+\sigma f\right\}_S=\ldots$$

$$\ldots=\left\{\frac{\partial}{\partial N}L^{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{m-1}{2}\right]}f+\sigma L^{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{m-1}{2}\right]}f\right\}_S=0. \quad (2.107')$$

Решение задачи (2.96), (2.97) (или (2.97′)), (2.99) дает формула

$$u(x_1,\ldots,x_n,\ t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}+\right.$$

$$\left.+C_n(t)\right)v_n(x_1,\ldots,x_n). \quad (2.108)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
A_n&=\int_D u_0(x_1,\ldots,x_n)\,v_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx,\\
B_n&=\int_D u_1(x_1,\ldots,x_n)\,v_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx,\\
C_n(t)&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)\,d\tau\times\\
&\times\int_D f(x_1,\ldots,x_n,\ \tau)\,v_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx.
\end{aligned}\right\} \quad (2.109)$$

В тех случаях, когда u_0, u_1 и F удовлетворяют условиям, наложенным на $f(x_1,\ldots,x_n,\ t)$, ряд (2.108) допускает m-кратное почленное дифференцирование и при $m\geqslant 2$ дает дважды непрерывно дифференцируемое решение смешанной задачи (2.96), (2.97) (или (2.97′)), (2.99). Если же u_0, u_1 удовлетворяют меньшим условиям гладкости или не выполняются условия (2.107), (2.107′), то ряд (2.108) дает, вообще говоря, только обобщенное решение смешанной задачи.

Используя фундаментальное решение задачи (2.96), (2.97), (или (2.97′)), (2.99), можно решить более общую задачу.

Назовем *пространственноподобной* такую поверхность $t=\mu(x_1,\ldots,x_n)$, что при $x_1,\ldots,x_n\in D$

$$1-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial\mu}{\partial x_j}>0.$$

Пусть надо в области $t > \mu(x_1, \ldots, x_n)$ найти решение уравнения

$$u_{tt} - Lu = f(x_1, \ldots, x_n, t), \tag{2.110}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u|_S = \psi(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{2.111}$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right|_S = \psi(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{2.111'}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u|_{t=\mu(x_1, \ldots, x_n)} &= u_0(x_1, \ldots, x_n), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=\mu(x_1, \ldots, x_n)} &= u_1(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{2.112}$$

Фундаментальным решением смешанной задачи (2.96), (2.97), (2.99) или (2.96), (2.97′), (2.99) называется обобщенная функция $v(t, t^0, x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, удовлетворяющая при $t < t_0$ уравнению (2.96), краевым условиям (2.97) (или (2.97′)) и начальным условиям

$$v\Big|_{t=t_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \delta(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0). \tag{2.113}$$

(δ — функция Дирака).

Применяя формулу Остроградского к интегралу

$$\int\limits_{\substack{\mu(x_1, \ldots, x_n) < t < t_0 \\ (x_1, \ldots, x_n) \in D}} \!\!\!\cdots\!\!\!\int \{u(v_{tt} - Lv) - v(u_{tt} - Lu)\}\, dx\, dt,$$

получим:

$$\begin{aligned} u(x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = &\int\limits_{\substack{\mu < t < t_0 \\ (x_1, \ldots, x_n) \in D}} vf(x_1, \ldots, x_n, t)\, dx\, dt + \\ &+ \int\limits_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \in S \\ \mu < t < t_0}} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N}\right) dS\, dt + \\ &+ \int\limits_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \in D \\ t = \mu}} \left[(uv_t - vu_t)\cos nt + v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\right] d\Sigma. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Здесь $d\Sigma$ — элемент гиперповерхности $t=\mu(x_1, \ldots, x_n)$, символ $\frac{\partial}{\partial N}$ определяется формулой (2.98), n — внешняя нормаль; в частности, $\cos nt < 0$ на Σ. Если функция v известна, то правая часть формулы (2.114) содержит только известные функции. Для v нетрудно получить разложение

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(t-t_0)}{\sqrt{\lambda_n}} v_n(x_1^0, \ldots, x_n^0) v_n(x_1, \ldots, x_n). \quad (2.115)$$

Формулу (2.114) следует применять так: вместо v подставить в правую часть ряд (2.115), формально поменять порядок дифференцирования и интегрирования, и полученный ряд даст решение задачи (2.110), (2.111), (2.112) (или (2.110), (2.111'), (2.112)).

В работе [22] исследованы особенности фундаментального решения смешанной задачи в случае, когда D — конечная выпуклая область с бесконечно дифференцируемой границей и $n=2$, краевое условие имеет вид (2.97) и оператор L является оператором Лапласа.

§ 6. Сведения о более общих гиперболических уравнениях второго порядка

1. О t-гиперболическом уравнении второго порядка *). Пусть

$$Lu = u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_{0i} \frac{\partial u}{\partial t\, \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0 \frac{\partial u}{\partial t} + Cu = G \quad (2.116)$$

— t-гиперболическое уравнение. Коэффициенты уравнения и вообще все функции, встречающиеся в этом параграфе, будем считать достаточно гладкими.

Гиперповерхность $t=\mu(x_1, \ldots, x_n)$ в пространстве $t, x_1, \ldots, x_n$ будем считать пространственноподобной (см. стр. 63), т. е.

$$1-\sum A_{ij} \mu_{x_i} \mu_{x_j} > 0. \quad (2.117)$$

*) См. § 1 настоящей главы.

Задача Коши

$$Lu = G, \quad u\Big|_{t=\mu(x_i)} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\mu(x_i)} = \psi \tag{2.118}$$

с данными на такой гиперповерхности корректна.

Доказательство корректности в случае аналитических коэффициентов с помощью построения фундаментального решения имеется в монографии [36] и статье [39]. В случае гладких коэффициентов решение задачи Коши можно свести к решению интегрального уравнения типа Вольтерра и, анализируя это уравнение, доказать корректность. Такой метод применяется в монографии [36] для четного n. Корректность в случае n нечетного отсюда выводится как следствие с помощью так называемого *метода спуска*. Для n нечетного задача Коши решается с помощью интегрального уравнения типа Вольтерра в монографии [27]. Для n четного применяется метод спуска (см. также [39]).

В монографии [27] изучена гладкость решения задачи Коши в зависимости от гладкости коэффициентов и начальных данных. Метод, примененный там, — априорные оценки решений в нормах $W_2^{(k)}$ (так называемые оценки энергетического типа). При достаточно гладких коэффициентах для k-кратной непрерывной дифференцируемости решения достаточно, чтобы φ было $k+1+\left[\frac{n}{2}\right]$ раз непрерывно дифференцируемым, а A, $\psi - k + \left[\frac{n}{2}\right]$ раз.

В случае постоянных коэффициентов указаны более точные оценки гладкости для φ и ψ (см. [14], стр. 38).

Метод интегрального уравнения Вольтерра дает, вообще говоря, теорему существования решения задачи Коши только вблизи поверхности, несущей начальные данные. Существование решения задачи Коши «в большом» можно получить с помощью метода конечных разностей [16].

2. О фундаментальном решении задачи Коши. Для линейного гиперболического оператора вида (2.116) с гладкими коэффициентами существует так называемое фундаментальное решение задачи Коши.

Если Lu — гиперболический оператор вида (2.116), то *фундаментальным решением* задачи Коши для этого оператора называется обобщенная функция, решающая задачу Коши:

$$Mv = 0, \quad t < t_0, \tag{2.119}$$

$$v\Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \delta(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0). \tag{2.120}$$

Здесь M — дифференциальный оператор, сопряженный по Лагранжу (см. стр. 20) с дифференциальным оператором L:

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij} v - \sum_{i=1}^{n} 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} (A_{0i} v) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i v}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} B_0 v + Cv, \qquad (2.121)$$

а символ δ означает δ-функцию Дирака [7].

Если функция $\Gamma(t, x_s) \not\equiv 0$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \Gamma_{x_i} \Gamma_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} 2A_{0i} \Gamma_t \Gamma_{x_i} = 0 \qquad (2.122)$$

при $\Gamma = 0$, то поверхность $\Gamma(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется *характеристикой* оператора L. Если характеристическая поверхность $\Gamma = 0$ имеет коническую точку $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$, то такую поверхность называют *характеристическим коноидом.*

Функцию $\Gamma(t, x_1, \ldots, x_n)$, определяющую характеристический коноид, можно выбрать так, что в окрестности точки $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ она будет достаточно гладкой, причем

$$\Gamma = \sum_{i,j=0}^{n} H_{ij}(t_0, x_i^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + O\left(\left(\sum_{i=0}^{n} (x_i - x_i^0)^2\right)^2\right). \qquad (2.123)$$

Здесь $x^0 = t$, $\| H_{ij}(t_0, x_i^0) \|$ — матрица, обратная матрице, которую образуют в точке t_0, x_i^0 коэффициенты при старших членах уравнения (2.121). Аналитический характер фундаментального решения следующий:

1) n нечетное:

$$v = u(t, x_i, t_0, x_i^0) \delta^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\Gamma) + \varepsilon(\Gamma) w(t, x_i, t_0, x_i^0); \qquad (2.124)$$

здесь $\delta^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(\Gamma)$ — производная порядка $\frac{n-3}{2}$ от функции Дирака, $\varepsilon(\Gamma)$ — функция Хевисайда:

$$\varepsilon(\Gamma) = \begin{cases} 0, & \Gamma < 0, \\ 1, & \Gamma \geqslant 0; \end{cases} \qquad (2.125)$$

2) n четное:

$$v = u(t, x_i, t_0, x_i^0)\,\Gamma_+^{-\frac{n-1}{2}}; \tag{2.126}$$

здесь $\Gamma_+^{-\frac{n-1}{2}}$ — обобщенная функция, которая получается при аналитическом продолжении «обычной» функции Γ_+^λ ($\operatorname{Re}\lambda > -1$) в точку $\lambda = -\frac{n-1}{2}$; u и w — достаточно гладкие функции своих аргументов, аналитические, если коэффициенты уравнения (2.116) аналитичны [15], [33], [36], [39]. Пусть фундаментальное решение определено вблизи пространственноподобной гиперповерхности

$$F(t, x_1, \ldots, x_n) = t - \mu(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2.127}$$

причем $t_0 > t$.

Чтобы решить в квадратурах задачу Коши (2.118), надо применить формулу Остроградского к интегралу

$$\int\limits_{\mu(x_1, \ldots, x_n) < t \leq t_0 + \varepsilon} (u(t, x_1, \ldots, x_n)\,Mv - vLu)\,dt\,dx_1 \ldots dx_n \tag{2.128}$$

$$(\varepsilon > 0 \text{ произвольно});$$

это дает формулу

$$u(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = \int\limits_{t=\mu(x_1, \ldots, x_n)} \sum_{i=0}^{n} P_i \cos(n, x_i)\,ds + \int\limits_{\mu(x_1, \ldots, x_n) \leq t \leq t_0} vG\,dx_1 \ldots dx_n. \tag{2.129}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = t, \quad \cos(n, x_0) = \cos(n, t),\\ &P_i = \sum_{j=0}^{n}\left(vA_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}v\right) - B_i uv,\\ &A_{00} = -1, \quad A_{0i} = A_{i0}, \end{aligned}\right\} \tag{2.130}$$

нормаль имеет отрицательную проекцию на ось t. Формула (2.129) не содержит справа неизвестных функций (если v известна) и дает в квадратурах решение задачи Коши. Интегралы в формуле (2.129) имеют тот смысл, который придают таким интегралам в теории обобщенных функций [7].

Для некоторых уравнений, в частности для важного уравнения

$$u_{tt}-a^2\Delta u+cu=0, \qquad a>0, \quad a,\ c=\mathrm{const}, \tag{2.131}$$

фундаментальное решение можно выписать в явном виде [15], [33], [36], [39]. Для гиперболического уравнения $Lu=G$ корректна задача отыскания u внутри характеристического конуса, если на поверхности конуса функция u задана. Если известно фундаментальное решение, то решение этой задачи выписывается в квадратурах [39].

3. О диффузии волн в случае уравнения второго порядка. Пусть u решает задачу Коши (2.118), причем $G=0$. Если $u(t_0, x_i^0)$ зависит только от значений начальных данных φ и ψ в произвольно малой окрестности пересечения поверхности $t=\mu(x_1, \ldots, x_n)$ характеристическим коноидом $\Gamma=0$ с вершиной в точке (t_0, x_i^0), то говорят, что для уравнения (2.116) отсутствует диффузия волн. Показано [36], [39], что в случае четного n диффузия всегда имеет место. В случае нечетного n отсутствие диффузии эквивалентно равенству $w=0$ (см. формулу (2.124)). Таково фундаментальное решение волнового уравнения или уравнений, которые к нему сводятся заменой переменных. В случае $n=3$ не найдено ни одного гиперболического уравнения вида (2.116), у которого существовала бы диффузия волн и которое не сводилось бы к волновому заменой переменных и искомой функции. Показано, что любое уравнение вида (2.116) при A_{ij}, $A_{0i}=\mathrm{const}$, у которого отсутствует диффузия волн, сводится заменой переменных и искомой функции к волновому уравнению [37]. В случае $n=5, 7, 9, \ldots$ существуют уравнения, не сводящиеся к волновому, для которых диффузия волн отсутствует [40].

4. О смешанной задаче. Для общего t-гиперболического уравнения $Lu=G$ корректна смешанная задача

$$Lu=G \quad \text{в области} \quad D\times(0\leqslant t<+\infty), \tag{2.132}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x_1, \ldots, x_n), \quad u_t\big|_{t=0}=u_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.133}$$

$$u|_S=0. \tag{2.134}$$

Здесь D — область n-мерного пространства с границей S [16]. Смешанную задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе, можно исследовать также с помощью преобразования Лапласа и метода аналитической аппроксимации [16].

Смешанную задачу можно свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения в функциональном пространстве, которое можно изучить методами теории операторов. Это позволяет получить доказательство корректности смешанной задачи с использованием очень небольшого аналитического аппарата [5].

Из результатов работ [25] следует, что в широком классе случаев решения уравнения (2.116), определенные в области $D\times(-\infty<t<+\infty)$, будут почти периодическими функциями времени.

Устойчивость решения смешанной задачи при $t\to\infty$ изучалась в работах [6], [26].

§ 7. Системы линейных гиперболических уравнений

1. Случай двух независимых переменных. Система первого порядка [1], [19], [33], [34], [41]. Любую систему дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\sum_{i=1}^{\nu}\left(a_{si}(x, y)\frac{\partial u_i}{\partial x}+b_{si}(x, y)\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)=c_s(x, y) \tag{2.135}$$

($s=1, 2, \ldots, \nu$; $u_i(x, y)$ — искомые функции) в случае, когда

$$\det\|b_{si}\|\neq 0,$$

можно записать в форме, разрешенной относительно $\frac{\partial u_i}{\partial y}$. Только о таких системах и пойдет речь.

Система уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial y}+A\frac{\partial}{\partial x}U=C, \tag{2.136}$$

где $U=(U_1, U_2, \ldots, U_N)$ — вектор, составленный из искомых функций, $A=A(x, y)$ — матрица порядка N, $C=(C_1(x, y), \ldots, C_N(x, y))$ — известный вектор, называется *гиперболической по И. Г. Петровскому* в области $G(x, y)$, если в каждой точке области G уравнение

$$\det \| A - \tau E \| = 0 \tag{2.137}$$

имеет вещественные и различные корни $\tau_1(x, y) < \ldots < \tau_N(x, y)$. Если в каждой точке кривой l_s

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \tau_s(x, y), \tag{2.138}$$

то кривая называется *характеристикой* системы уравнений (2.136). Если вместо вектора U ввести новый искомый вектор $U = Hu$, где $H(x, y)$ — неособая матрица, то мы получим гиперболическую систему, эквивалентную исходной. При таком преобразовании характеристики нового и старого уравнений совпадают. Матрицу H можно выбрать так, что система (2.136) перейдет в систему

$$\frac{\partial}{\partial y} u + T \frac{\partial}{\partial x} u = g, \tag{2.139}$$

где T — диагональная матрица, вдоль диагонали которой стоят собственные числа матрицы A, т. е. $\tau_1, \ldots, \tau_N$. Будем считать, что система (2.136) определена в окрестности оси Ox. Для системы (2.136), гиперболической по И. Г. Петровскому, и для эквивалентной ей системы (2.139) корректна задача Коши

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x)$$

(если матрица A, векторы C и ψ имеют непрерывные производные первого порядка). Если A, C и ψ имеют n непрерывных производных, то это верно и для решения задачи Коши U.

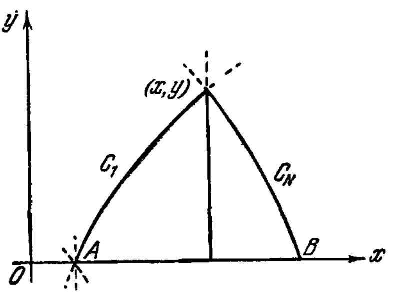

Рис. 2.

Через каждую точку (x_0, y_0) можно провести N различных характеристик $C_1, \ldots, C_N$ системы (2.136). Решение задачи Коши в точке (x, y) зависит только от начальных данных на отрезке AB (рис. 2). Разрыв начальных данных в точке A приводит к разрыву в решении $u(u_1, \ldots, u_N)$ на характеристиках, исходящих из A, и только на них. Разрывные решения задачи Коши должны быть обобщенными решениями системы уравнений (2.136). Вектор u называется обобщенным решением системы уравнений (2.136) в области D, если в этой области:

1) компоненты вектора u суммируемы,

2) для любого вектора ψ, имеющего непрерывные производные первого порядка и равного нулю в окрестности границы D,

$$\iint\limits_D \left[u\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(A^*\psi)\right)+C\psi\right]dx\,dy=0. \qquad (2.140)$$

Пусть система уравнений (2.139) задана в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

$$\tau_1(x, y) > \tau_2(x, y) > \ldots > \tau_r(x, y) > 0 > \\ > \tau_{r+1}(x, y) > \ldots > \tau_N(x, y). \qquad (2.141)$$

Тогда при дополнительных условиях гладкости корректна смешанная задача

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y}+Tu=g, \qquad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0,\\ &u_\rho-\sum_{j=r+1}^{N} m_{j\rho}u_j\Big|_{x=0}=\chi_\rho(t), \qquad \rho=1, 2, \ldots, r,\\ &u\Big|_{y=0}=\psi(x), \qquad x\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.142)$$

Здесь $m_{j\rho}$ — заданные числа, $\chi_\rho(t)$ — заданные функции, $\psi(x)$ — заданный вектор.

2. Случай произвольного числа независимых переменных. Система линейных уравнений

$$\frac{\partial^{m_i}u_i}{\partial t^{m_i}}-\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k_0+\ldots+k_n\leqslant m_i\\ k_0<m_i}} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n)\times \\ \times\frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad i=1, 2, \ldots, N, \\ k=k_0+\ldots+k_n, \qquad (2.143)$$

называется *гиперболической по И. Г. Петровскому* в точке $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если при любых действительных α_i, сумма квадратов которых положительна, определитель

$$\det \| \lambda^{m_i}\delta_{ij} - \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=m_i} A_{ij}^{(k_0, \ldots, k_n)}(t^0, \ldots, x_n^0)\lambda^{k_0}\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}\|, \quad (2.144)$$

$$\delta_{ij}=1 \text{ при } i=j, \quad \delta_{ij}=0 \text{ при } i\neq j,$$

имеет только действительные и различные корни λ.

Для таких систем доказана корректность задачи Коши [21], там же рассмотрены нелинейные гиперболические системы; см. также [9], [10].

Задача Коши для системы (2.143) ставится как задача нахождения $u_i(t, x_1, \ldots, x_N)$ по начальным данным

$$u_i\Big|_{t=0} = u_{i0}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial^{m_i-1}u}{\partial t^{m_i-1}}\Big|_{t=0} = u_{i,m_i-1}(x_1, \ldots, x_n), \quad (2.145)$$

$i=1, 2, \ldots, N$; $u_{i0}, \ldots, u_{i,m_i-1}$ заданы.

Если поверхность $F(t, x_1, \ldots, x_n)=0$ удовлетворяет уравнению

$$\det \| \delta_{ij}F_t^{m_i} - \sum_{k_0+\ldots+k_n=m_i} A_{ij}^{(k_0, \ldots, k_n)}(t, \ldots, x_n)F_t^{k_0}F_{x_1}^{k_1}\ldots F_{x_n}^{k_n}\| = 0, \quad (2.146)$$

то эта поверхность называется *характеристикой системы* уравнений (2.143). Если при $t=0$ начальные данные для системы (2.143) имеют разрыв вдоль достаточно гладкой $(n-1)$-мерной поверхности S, то решение задачи Коши будет тоже иметь разрыв вдоль характеристических поверхностей, проходящих через S. Для гиперболических систем первого порядка это показано в работе [32].

[Если начальные данные разрывны, то решения гиперболической системы в обычном смысле не существует. Решение понимается в смысле интегрального тождества, подобно тому как было определено в предыдущем пункте обобщенное решение для системы первого порядка (см. формулу (2.140)).]

В случае $N=1$ система (2.143) вырождается в одно гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=\sum_{\substack{k_0+\ldots+k_n\leq m\\ k_0<m}} A^{(k_0,\ldots,k_n)}(t,x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}+ \\ +f(t,x_1,\ldots,x_n). \qquad (2.143')$$

Обобщенная функция $V(t, t_0, x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, удовлетворяющая уравнению (2.143') при $f=0$ в области $t<t_0$, а при $t=t_0$ начальным условиям

$$V\Big|_{t=t_0}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}V\Big|_{t=t_0}= \\ =\delta(x_1-x_1^0, \ldots, x_n-x_n^0), \qquad (2.147)$$

называется *фундаментальным решением задачи Коши*. В случае $N>1$ роль фундаментального решения играет фундаментальный тензор V_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, N)$, компонентами которого являются составляющие вектора $(V_{1i}(t, t_0, x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0), V_{2i}, \ldots, V_{Ni})$, удовлетворяющие системе (2.143) при $f_i=0$ и $t<t_0$, а при $t=t_0$ начальным условиям

$$V_{ji}\Big|_{t=t_0}=0,\ \frac{\partial V_{ji}}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{m_j-1}-V_{ji}}{\partial t^{m_j-1}}\Big|_{t=t_0}= \\ =\delta_{ij}\delta(x_1-x_1^0, \ldots, x_n-x_n^0) \qquad (2.148)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера).

Для гиперболических по И. Г. Петровскому уравнений и систем фундаментальные решения построены ([3], [7], [14] — постоянные коэффициенты, случай одного уравнения, [2] — случай системы и случай переменных коэффициентов). Доказано, что фундаментальные решения имеют особенности лишь на характеристическом коноиде, исследован характер этих особенностей ([3] — случай постоянных коэффициентов, [2] — случай переменных коэффициентов).

Характеристический коноид для гиперболической системы определяется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения второго порядка. Коноид для гиперболического уравнения высшего порядка состоит из нескольких полостей.

Если фундаментальное решение в области между двумя полостями характеристического коноида тождественно равно нулю, то эту область называют *лакуной*. Исследованию лакун посвящены работы [4], [20].

Зная фундаментальный тензор, решение любой задачи Коши можно записать в квадратурах. При $n=1$ (случай двух независимых переменных) фундаментальный тензор будет обобщением функции Римана. Особенности компонент тензора Римана будут находиться на характеристиках, проходящих через точку $x=x^0$, $t=t_0$; характеристический коноид здесь вырождается в $\sum\limits_{i=1}^{N} n_i$ характеристических кривых. Для случая $N=1, n=1$ фундаментальное решение подробно исследовано в [38].

В некоторых частных случаях удается доказать корректность задачи Коши для гиперболических систем и в случае совпадения корней уравнения (2.144).

Это касается, в частности, систем первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n} A_i(t, x_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}+Bu+f \tag{2.149}$$

($u=\{u_i(t, x_1, \ldots, x_n)\}$, $i=1, 2, \ldots, N$; A_i — симметрические матрицы [35] порядка n), систем вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Lu+f(t, x_i),\ u=(u_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{2m}(t, \ldots, x_n)), \tag{2.150}$$

где L — так называемый *сильно эллиптический оператор* второго порядка [5] (см. также гл. V, § 3 настоящей книги), и некоторых гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными [33].

Полные результаты о корректности задачи Коши получены для уравнений и систем с постоянными коэффициентами.

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)u \tag{2.151}$$

называется *гиперболическим по Гордингу*, если многочлен в правой части имеет порядок $\leqslant m$ по всем аргументам, $<m$

по аргументу $\frac{\partial}{\partial t}$ и если вещественные части корней уравнения $\lambda^m = L(\lambda, i\sigma_1, \ldots, i\sigma_n)$ ограничены при всех вещественных σ. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов ([8], гл. III) называют гиперболической систему

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(i \frac{\partial}{\partial x_l}\right) u_k(x, t) \tag{2.152}$$

линейных уравнений с постоянными коэффициентами, если:

а) степенной порядок роста функции $\Lambda(s)$ не превосходит 1, т. е.

$$\Lambda(s) \leqslant a\,|s| + b, \quad a, b = \text{const}; \tag{2.153}$$

б) при вещественных $s = \sigma$ функция $\Lambda(s)$ ограничена:

$$\Lambda(s) \leqslant c \qquad (c = \text{const}). \tag{2.154}$$

Здесь $\Lambda(s) = \max \operatorname{Re} \lambda_j(s)$, где $\lambda_j(s)$ — характеристические корни матрицы $\|P_{jk}(s)\|$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$.

Для гиперболических систем (2.152) и только для гиперболических, если ограничиться системами этого вида, задача Коши с начальными данными при $t = 0$ корректна в классе достаточно гладких функций без каких-либо ограничений на поведение этих функций на бесконечности [8]. Аналогичная теорема имеет место и для уравнения (2.151).

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

§ 1. Общие сведения

1. Понятие о гармонической функции. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа, которое для трех независимых переменных имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

или

$$\Delta u \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0,$$

а в случае n независимых переменных —

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Уравнение Лапласа инвариантно относительно поворота и переноса декартовых прямоугольных координат.

Функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *гармонической* в области D пространства n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если в этой области она непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Если область D бесконечна, то на гармоническую функцию обычно накладывают еще одно условие. Пусть бесконечная область D имеет конечную границу; такая граница может состоять, например, из конечного числа замкнутых поверхностей, вне которых расположена область D. Обозначим через R расстояние от точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до начала координат: $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Упомянутое выше условие состоит в том, что произведение $R^{n-2} u$ должно быть ограничено на бесконечности, иначе говоря, должна существовать такая постоянная C, что во всех точках области D, достаточно удаленных от начала координат, должно удовлетворяться неравенство

$$|u(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \frac{C}{R^{n-2}}. \tag{3.1}$$

В случае двух переменных последнее условие сводится к тому, что функция должна быть ограничена на бесконечности; в случае трех переменных функция должна удовлетворять в достаточно удаленных от начала координат точках области неравенству

$$|u(x, y, z)| < \frac{C}{R}. \tag{3.2}$$

Уравнение

$$\Delta u = f(x, y, z)$$

или, в случае n независимых переменных,

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

называется *уравнением Пуассона.*

2. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.

1) Задача о стационарном распределении температур в изотропном теле при отсутствии в нем источников и поглотителей тепла приводит к уравнению Лапласа, в котором u — температура, рассматриваемая как функция от координат.

Если в теле распределены источники тепла, мощность которых не меняется со временем, то температура удовлетворяет уравнению Пуассона.

2) Установившееся потенциальное течение несжимаемой жидкости также приводит к уравнению Лапласа. Для потенциального течения вектор скорости $v = \operatorname{grad} u$, где u — потенциал скорости. Если в потоке отсутствуют источники и стоки жидкости, то u удовлетворяет уравнению Лапласа; при наличии распределенных источников и стоков потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Пуассона.

3) Потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Лапласа в области, не содержащей зарядов, и уравнению Пуассона в области непрерывно распределенных зарядов.

4) Потенциал ньютонова гравитационного поля удовлетворяет уравнению Лапласа в области, не содержащей гравитирующих масс, и уравнению Пуассона в области, содержащей распределенные гравитирующие массы.

5) Задача упругого кручения призматического стержня приводит к двумерному уравнению Лапласа для так называемой *функции кручения*. Через эту функцию и ее производные просто выражаются напряжения и деформации. К двумерному уравнению Лапласа приводит также и задача изгиба призматического стержня.

6) Задача о статических прогибах мембраны приводит к двумерному уравнению Пуассона, в котором u — прогиб мембраны, а $f(x, y)$ — отношение интенсивности внешней нагрузки к напряжению мембраны.

3. Уравнение Лапласа в криволинейных координатах. Если ввести криволинейные ортогональные координаты q_1, q_2, q_3, то оператор Лапласа преобразуется к следующему виду:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\}, \tag{3.3}$$

где

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2, \qquad i = 1, 2, 3.$$

На плоскости

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right\}, \\ H_i^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2, \qquad i = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Коэффициенты H_i называются *коэффициентами Ламе* *).

*) Значения коэффициентов Ламе для наиболее употребительных систем криволинейных координат см. в *СМБ*, Математический анализ, дифференцирование и интегрирование, гл. IV.

Формула (3.3) очевидным образом распространяется на случай любого числа координат.

Приведем выражения оператора Лапласа в некоторых, наиболее употребительных, системах криволинейных координат.

Круговые цилиндрические координаты:

$$q_1=r, \quad q_2=\varphi, \quad q_3=z;$$

$$0\leqslant r<\infty, \quad -\pi<\varphi\leqslant\pi, \quad -\infty<z<+\infty.$$

Связь с декартовыми координатами:

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=q_3.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta u\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Эллиптические цилиндрические координаты:

$$q_1=\operatorname{ch}\alpha, \quad q_2=\cos\varphi, \quad q_3=z;$$

$$|q_1|\geqslant 1, \quad |q_2|\leqslant 1, \quad -\infty<q_3<+\infty.$$

Связь с декартовыми координатами:

$$x=q_1q_2=\operatorname{ch}\alpha\cos\varphi,$$

$$y=\sqrt{(q_1^2-1)(1-q_2^2)}=\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi,$$

$$z=q_3.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta u=\frac{\sqrt{(q_1^2-1)(1-q_2^2)}}{q_1^2-q_2^2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\sqrt{\frac{q_1^2-1}{1-q_2^2}}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\sqrt{\frac{1-q_2^2}{q_1^2-1}}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right]+\frac{q_1^2-q_2^2}{\sqrt{(q_1^2-1)(1-q_2^2)}}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}.$$

Параболические цилиндрические координаты. Выражение декартовых координат через цилиндрические:

$$x=\frac{1}{2}(q_1^2-q_2^2),$$

$$y=q_1q_2,$$

$$z=q_3,$$

где q_1, q_2 и q_3 изменяются от $-\infty$ до $+\infty$.

Оператор Лапласа:

$$\Delta u=\frac{1}{q_1^2+q_2^2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}+(q_1^2+q_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2}\right\}.$$

Параболоидные координаты (параболические координаты вращения):

$$q_1=\lambda,\quad q_2=\mu,\quad q_3=\varphi;$$

λ, μ изменяются от $-\infty$ до $+\infty$, $-\pi<\varphi\leqslant+\pi$.

Связь с декартовыми координатами:

$$x=\lambda\mu\cos\varphi,\quad y=\lambda\mu\sin\varphi,\quad z=\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2).$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta u=\frac{1}{\lambda\mu\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\lambda\mu\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\lambda\mu\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Биполярные координаты. Обозначим соответственно через r_1 и r_2 расстояния от точки $M(x, y)$ плоскости xOy до точек $F_1(1, 0)$ и $F_2(-1, 0)$; пусть φ_1 и φ_2 — углы, образуемые векторами $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$ с положительным направлением оси x. За новые координаты примем

$$q_1=\alpha=\ln\frac{r_2}{r_1},$$

$$q_2=\beta=\varphi_1-\varphi_2,$$

$$q_3=z;$$

$$-\infty<\alpha<+\infty,\quad -\pi<\beta\leqslant+\pi,\quad -\infty<z<+\infty.$$

Связь с декартовыми координатами:

$$x=\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},\quad y=\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},\quad z=z.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta u=(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}.$$

Бисферические координаты:

$$q_1=\alpha,\quad q_2=\beta,\quad q_3=\varphi;$$

$$0\leqslant\alpha<\beta,\quad -\infty<\beta<+\infty,\quad -\pi<\varphi\leqslant+\pi.$$

Связь с декартовыми координатами:

$$x=\frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},\quad y=\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},\quad z=\frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}.$$

Уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\\+\frac{1}{\sin\alpha(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0.$$

Подстановка $u=\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\,v$ приводит предыдущее уравнение к виду

$$\frac{\partial^2v}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2v}{\partial\beta^2}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{4}v+\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2}=0.$$

Тороидальные координаты:

$$q_1=\alpha,\quad q_2=\beta,\quad q_3=\varphi;$$
$$0\leqslant\alpha<\infty,\quad -\pi<\beta\leqslant+\pi,\quad -\pi<\varphi\leqslant+\pi.$$

Связь с декартовыми координатами:

$$x=\frac{\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},\quad y=\frac{\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},\quad z=\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}.$$

Уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\\+\frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0.$$

Подстановка $u=\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\,v$ приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2v}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2v}{\partial\beta^2}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\operatorname{cth}\alpha+\frac{1}{4}v+\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}\frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2}=0.$$

Вытянутые сфероидальные координаты:

$$q_1=\alpha,\quad q_2=\beta,\quad q_3=\varphi;$$
$$0\leqslant\alpha<\infty,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad -\pi<\varphi\leqslant+\pi.$$

Связь с декартовыми координатами:

$$x = \operatorname{sh}\alpha \sin\beta \cos\varphi,$$
$$y = \operatorname{sh}\alpha \sin\beta \sin\varphi,$$
$$z = \operatorname{ch}\alpha \cos\beta.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Сферические координаты:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi;$$

$$0 \leqslant r < \infty, \quad -\pi < \varphi \leqslant +\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

Связь с декартовыми координатами:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right].$$

Эллиптические координаты. Выражения декартовых координат через эллиптические:

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

где

$$-c^2 \leqslant \lambda < \infty, \quad -b^2 \leqslant \mu < -c^2, \quad -a^2 \leqslant \nu < -b^2.$$

Введем обозначение

$$f(k) = (a^2+k)(b^2+k)(c^2+k),$$

тогда

$$\Delta u=\frac{4\sqrt{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}\left[\frac{\nu-\mu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda-\nu}{\sqrt{f(\nu)f(\lambda)}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{f(\mu)}\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+\frac{\mu-\lambda}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{f(\nu)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right].$$

Если положить $\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}=d\alpha$, $\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}=d\beta$, $\frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}=d\gamma$, то

$$\Delta u=\frac{4}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}\left[(\nu-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+(\lambda-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\right.$$

$$\left.+(\mu-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial\gamma^2}\right],$$

λ, μ, ν — эллиптические функции Вейерштрасса от новых переменных α, β, γ: $\lambda=\wp(\alpha)$, $\mu=\wp(\beta)$, $\nu=\wp(\gamma)$. Проведенное преобразование называют иногда *преобразованием Ламе.*

Двумерный оператор Лапласа и конформное преобразование координат. Если новые координаты q_1 и q_2 связаны с x и y соотношениями

$$\frac{\partial x}{\partial q_2}=\frac{\partial y}{\partial q_1},\quad \frac{\partial x}{\partial q_1}=-\frac{\partial y}{\partial q_2}$$

и $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_2}$ не обращаются одновременно в нуль, то преобразование называется *конформным.* При этом преобразовании

$$H_1=H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$\Delta u=\frac{1}{H_1}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}\right\}.$$

Уравнение Лапласа принимает вид $\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}=0$, т. е. остается инвариантным.

4. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Непосредственным дифференцированием можно проверить, что функция

$$v(M, M_0)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \quad (3.5)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Эта функция называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа. Ее производные по любому не зависящему от точки M направлению также будут гармоническими всюду, кроме точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Если u — потенциал электростатического поля, то фундаментальное решение $v(M, M_0)$ с точностью до постоянного множителя равно потенциалу в точке M, созданному единичным зарядом (источником поля), помещенным в точке M_0. Аналогичное физическое истолкование можно придать функции $v(M, M_0)$ и в других физических задачах.

Для плоского случая,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

фундаментальным решением будет функция

$$v(M, M_0) = \ln \frac{1}{r} = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \tag{3.6}$$

для n-мерного случая, $n > 2$, — функция

$$v = \frac{1}{r^{n-2}}. \tag{3.7}$$

§ 2. Интегральные формулы

1. Формулы Грина. Первая формула Грина:

$$\int\limits_D v\Delta u\, dx = \int\limits_S v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int\limits_D \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v\, dx =$$
$$= \int\limits_S v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \tag{3.8}$$

Вторая формула Грина:

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_S \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS. \tag{3.9}$$

Здесь ν обозначает внешнюю нормаль к поверхности S.

Формулы Грина верны при любом числе n независимых переменных, если область D конечная, ее граница S кусочно гладкая, функции u и v непрерывны вместе со своими первыми производными в замкнутой области $\bar{D}=D+S$, а вторые производные этих функций непрерывны в открытой области D.

Если функции u и v гармоничны в D, то формулы Грина принимают вид

$$\int_S v\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=\int_D\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx, \tag{3.10}$$

$$\int_S\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)dS=0. \tag{3.11}$$

Формулы (3. 10) и (3. 11) верны и для бесконечной области D, если функции u и v удовлетворяют условию (3. 1).

При $v=u$ формула (3. 10) переходит в так называемую *формулу Дирихле*

$$\int_S u\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=\int_D\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx, \tag{3.12}$$

верную, если функция u гармонична в D. В случае трехмерного пространства формула Дирихле имеет вид

$$\int_S u\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=\int_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx.$$

2. Свойство нормальной производной гармонической функции. Если функция u гармонична в конечной области D, то

$$\int_S\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=0.$$

Эта формула получается из формулы (3. 10), если в последней положить $v\equiv1$.

3. Фундаментальная формула. Пусть D — конечная трехмерная область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью S. Пусть M_0 — точка внутри D; через M обозначим точку, которая может находиться как внутри, так и на границе области D. Через r обозначим расстояние между точками M и

M_0, через ν — внешнюю нормаль к S, проведенную через точку M.

Пусть функция $u(M)$ непрерывна вместе со своими первыми производными в замкнутой области $D+S$, тогда как вторые производные этой функции непрерывны по крайней мере в открытой области D. Тогда имеет место формула

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u(M)}{\partial\nu}-u(M)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right)dS-\\ -\frac{1}{4\pi}\int\limits_D\frac{1}{r}\Delta u(M)\,dx. \qquad (3.13)$$

Если функция u гармонична в D, то

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u(M)}{\partial\nu}-u(M)\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\right)dS; \qquad (3.14)$$

формула (3.14) верна и для бесконечной области D, если только гармоническая функция u удовлетворяет условию (3.2).

В пространстве n измерений, $n>3$, верны аналогичные формулы:

$$u(M_0)=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_S\left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(M)}{\partial\nu}-u(M)\frac{\partial\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial\nu}\right)dS-\\ -\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_D\frac{1}{r^{n-2}}\Delta u(M)\,dx \qquad (3.15)$$

и, если функция u гармонична в D,

$$u(M_0)=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_S\left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(M)}{\partial\nu}-u(M)\frac{\partial\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial\nu}\right)dS. \qquad (3.16)$$

Здесь σ_n — поверхность единичной сферы в n-мерном пространстве (см. стр. 58).

Для плоского случая $(n=2)$

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right)dS-\\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\Delta u(M)\ln\frac{1}{r}\,dx. \qquad (3.17)$$

Все поверхностные интегралы, входящие в правые части формул (3.13) — (3.17), допускают дифференцирование под знаком интеграла по координатам точки M_0 и являются гармоническими в области D функциями этой точки.

§ 3. Основные свойства гармонических функций

1. Дифференцируемость и аналитичность. Гармоническая функция дифференцируема бесконечное число раз, и все ее производные гармоничны. Более того, всякая гармоническая функция аналитична.

2. Теорема о среднем. *Пусть функция $u(x)$ гармонична в n-мерной области D, и пусть шар, ограниченный сферой S, целиком расположен внутри области D. Тогда значение гармонической функции в центре C сферы S равно среднему арифметическому ее значений на поверхности этой сферы:*

$$u(C)=\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int_S u\,dS.$$

Здесь r — радиус сферы S, σ_n — площадь поверхности сферы радиуса единица (см. стр. 58).

Для плоскости и для трехмерного пространства теорема о среднем соответственно принимает вид

$$u(C)=\frac{1}{2\pi r}\int_S u\,dS$$

(здесь S — окружность радиуса r с центром в точке C) и

$$u(C)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_S u\,dS.$$

Верна и обратная теорема: *если в области D функция u непрерывна и для нее справедлива теорема о среднем, то эта функция гармонична в области D.*

3. Принцип максимума. Если функция гармонична в конечной области и отлична от тождественной постоянной, то внутри области эта функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения. Если данная гармоническая функция, кроме того, непрерывна в замкнутой области (т. е. в области вместе с ее границей), то эта функция принимает как наименьшее, так и наибольшее свое значение только на границе области.

Две гармонические функции, совпадающие на границе области, тождественно совпадают и всюду внутри.

4. Теорема Лиувилля. *Функция, гармоническая во всем пространстве (на всей плоскости) и ограниченная сверху или снизу, есть постоянная.*

5. Первая теорема Гарнака. *Если последовательность функций u_k, гармонических внутри конечной области и непрерывных на ее границе, равномерно сходится на границе, то она равномерно сходится и во всей области. При этом предельная функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ будет гармонической внутри области.*

6. Вторая теорема Гарнака. *Пусть u_k — неотрицательные функции, гармонические внутри области D. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится хотя бы в одной внутренней точке области, то он сходится всюду внутри области, сумма его — гармоническая функция и для всякой замкнутой подобласти, целиком лежащей внутри D, сходимость равномерна.*

7. Вариационные свойства. 1) В классе непрерывно дифференцируемых в замкнутой области функций, принимающих заданное значение $\varphi(M)$ на границе S данной области D, функция, гармоническая в этой области, сообщает наименьшее значение так называемому *интегралу Дирихле*

$$D[u] = \int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx. \tag{3.18}$$

2) Гармоническая в области D функция, удовлетворяющая на границе S этой области краевому условию

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu\right]_S = \psi(M), \tag{3.19}$$

где $h=\text{const}>0$, а ψ — заданная на S непрерывная функция, сообщает, в классе непрерывно дифференцируемых в замкнутой области функций, минимум функционалу

$$D[u]+\int_S (hu^2+2\psi u)\,dS. \tag{3.20}$$

3) Вариационный принцип, сформулированный в 2), остается в силе и тогда, когда $h\equiv 0$, но в этом случае функция ψ необходимо должна удовлетворять равенству

$$\int_S \psi\,dS=0. \tag{3.21}$$

Функция, удовлетворяющая в области D уравнению Пуассона

$$\Delta u=-f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.22}$$

и одному из перечисленных выше краевых условий, обладает теми же вариационными свойствами, с той разницей, что интеграл Дирихле $D[u]$ должен быть заменен интегралом

$$D[u]-2\int_D f\,dx; \tag{3.23}$$

при $h\equiv 0$ условие (3.21) должно быть заменено следующим:

$$\int_D f\,dx+\int_S \psi\,dS=0. \tag{3.24}$$

8. Гармонические функции от двух независимых переменных и аналитические функции от комплексного переменного. Действительная и мнимая части любой аналитической функции от комплексной переменной $z=x+iy$ представляют собой гармонические функции.

Пример 1. Гармонические полиномы от двух независимых переменных. Положим $f(z)=z^n$, где n — целое положительное число. $f(z)$ — аналитическая функция при всех значениях z. Действительная и мнимая части от $(x+iy)^n$ называются *гармоническими полиномами*.

Приводим выражения для гармонических полиномов при различных значениях n:

n	$\operatorname{Re}(z^n) = r^n \cos n\varphi$	$\operatorname{Im}(z^n) = r^n \sin n\varphi$
1.	x	y
2.	$x^2 - y^2$	$2xy$
3.	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$
4.	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	$4(x^3y - xy^3)$
5.	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$	$5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$
6.	$x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$	$6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5$
7.	$x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6$	$7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$
8.	$x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8$	$8(x^7y - 7x^5y^3 + 7x^3y^5 - xy^7)$

Пример 2. Функция $f(z) = z^{-n}$, где n — целое положительное число, аналитическая всюду, кроме точки $z = 0$ ($x = 0$, $y = 0$). В соответствии с этим функции

$$\operatorname{Re}(z^{-n}) = r^{-n} \cos n\varphi = \frac{\operatorname{Re}(z^n)}{r^{2n}}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\operatorname{Im}(z^{-n}) = -r^{-n} \sin n\varphi = -\frac{\operatorname{Im}(z^n)}{r^{2n}}$$

гармоничны в любой области, не содержащей начала координат.

Пример 3. Функции $e^{\alpha z}$, $\cos \alpha z$, $\sin \alpha z$, $\operatorname{ch} \alpha z$, $\operatorname{sh} \alpha z$ аналитичны при всех значениях z. Отделяя их действительные и мнимые части, придем к важным гармоническим функциям:

$$e^{\alpha x} \cos \alpha y, \quad e^{\alpha x} \sin \alpha y, \quad \cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha y, \quad \sin \alpha x \operatorname{sh} \alpha y,$$

$$\sin \alpha x \operatorname{ch} \alpha y, \quad \cos \alpha x \operatorname{sh} \alpha y, \quad \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha y,$$

$$\operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha y, \quad \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha y, \quad \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha y.$$

Пример 4. Функция $f(z) = \ln z$ аналитична в плоскости z с выключенной полупрямой $y = 0$, $x \leqslant 0$. Ее действительная часть $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$ и ее мнимая часть $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ будут гармоническими функциями в указанной области.

§ 4. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона

1. Внутренние краевые задачи.

а) Первая краевая задача, или задача Дирихле. Требуется найти функцию, которая внутри области D удовлетворяет уравнению Лапласа (Пуассона), непрерывна в замкнутой области, включая границу S, и принимает на границе заданные значения

$$u|_S = \varphi. \tag{3.25}$$

б) Вторая краевая задача, или задача Неймана. По-прежнему разыскивается функция, непрерывная внутри области и удовлетворяющая в ней уравнению Лапласа или Пуассона, а на границе этой области — краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \psi. \tag{3.26}$$

Если искомая функция удовлетворяет уравнению Лапласа, то входящая в краевое условие данная функция ψ необходимо должна удовлетворять равенству (3.21). Если искомая функция должна удовлетворять уравнению Пуассона (3.22), то функция ψ должна удовлетворять равенству (3.24).

в) Третья краевая задача отличается от второй тем, что условие (3.26) заменяется краевым условием (3.19). Условия (3.21) и (3.22) перестают быть необходимыми.

Физический смысл трех краевых задач проиллюстрируем на задаче о стационарном распределении температур.

В задаче Дирихле задаются температуры на границе тела. В задаче Неймана заданы тепловые потоки через границу, пропорциональные $\frac{\partial u}{\partial \nu}$; физический смысл условия (3.21) таков: для сохранения стационарного распределения температур суммарный поток тепловой энергии, протекающей через границу тела, должен быть равен нулю. Условие (3.22) есть условие равенства энергии, выделяемой источниками, распределенными в теле, и энергии, выходящей через границу тела.

В третьей краевой задаче рассматриваются условия теплообмена с окружающей средой, температура которой $\frac{\psi}{h}$, где h — коэффициент внешней теплопроводности, деленный на теплоемкость.

г) Смешанная краевая задача. На разных участках границы задаются условия различных типов.

2. Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа. От внутренних эти задачи отличаются не характером краевых условий, а только тем, что искомая функция должна быть гармонична в области, расположенной вне одной или нескольких замкнутых поверхностей, и должна удовлетворять неравенству (3.1); для трехмерного пространства это условие принимает вид (3.2), а на плоскости переходит в условие ограниченности искомой функции на бесконечности.

3. Корректность краевых задач. Первая и третья краевые задачи имеют единственное решение; если граница области удовлетворяет условиям Ляпунова (см. § 8 настоящей главы), то решение как той, так и другой задачи существует и непрерывно зависит от краевых данных.

Несколько сложнее обстоит дело со второй краевой задачей (задачей Неймана). Сначала скажем о внутренней задаче для уравнения Лапласа. Если краевая функция ψ в условии (3.26) удовлетворяет равенству (3.21), а граница области удовлетворяет тем же условиям Ляпунова, то решение задачи Неймана существует, если краевая функция непрерывна; однако это решение определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого и потому не единственно. Ясно, что в этом случае не приходится говорить о непрерывной зависимости решения от краевой функции. В самом деле, можно сколь угодно мало изменить краевую функцию, но так, чтобы она перестала удовлетворять условию (3.21), и тогда решение перестанет существовать. С другой стороны, если решение все же существует, то, прибавив к нему достаточно большую постоянную, мы добьемся того, что двум сколь угодно близким краевым функциям будут соответствовать сколь угодно далекие решения задач Неймана.

Тем не менее непрерывная зависимость решения и здесь будет иметь место, если: 1) малые изменения краевой функции ψ таковы, что они не нарушают равенства (3.21); 2) произвольное постоянное слагаемое, с точностью до которого определено решение задачи Неймана, выбрано, например, так, чтобы решение удовлетворяло равенству

$$\int\limits_S u\,dS = 0;$$

в таком случае решение будет единственным и будет непрерывно зависеть от функции ψ.

Для внешней задачи Неймана на плоскости остается в силе все только что сказанное относительно внутренней задачи; для разрешимости внешней задачи Неймана в пространстве $n \geqslant 3$ переменных условие (3.21) не является необходимым: решение существует при любой непрерывной функции ψ, непрерывно зависит от ψ и единственно.

4. Задача Дирихле с разрывными краевыми условиями («обобщенная» задача Дирихле). Требование непрерывности краевых значений слишком стеснительно для приложений. Его можно существенно ослабить. Так, в плоском случае будем считать, что граничная функция непрерывна на границе всюду, кроме конечного числа точек, где она имеет только разрывы первого рода. От решения потребуем, чтобы оно было ограниченным и непрерывным в замкнутой области всюду, за исключением точек разрыва заданной граничной функции.

«Обобщенную» задачу Дирихле для плоского случая можно свести к обычной задаче. Пусть $\varphi^+(s_0)$ и $\varphi^-(s_0)$ — предельные значения граничной функции при $s \to s_0$ при обходе контура соответственно в положительном и отрицательном направлении, $H=\varphi^+(s_0)-\varphi^-(s_0)$. Обозначим через α угол между двумя касательными, проведенными в точке s_0 в противоположных направлениях. Если точка s_0 не угловая, то $\alpha = \pi$. Функция $\frac{H}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}$, где x_0, y_0 — координаты точки s_0, будет гармонической функцией и непрерывной всюду, кроме точки s_0; при переходе через эту точку вдоль контура она испытывает скачок, равный H.

При приближении к этой точке изнутри по различным направлениям она принимает значения, заключенные между $-\frac{H}{2}$ и $+\frac{H}{2}$.

Функция $\Phi(s) = \varphi(s) - \frac{H}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}$ будет уже непрерывна на контуре.

Мы получим решение «обобщенной» задачи Дирихле, положив

$$u(x, y) = U(x, y) + \frac{H}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

где U — решение задачи Дирихле, принимающее на границе непрерывное значение $\Phi(s)$.

При приближении к точке разрыва граничных условий по различным направлениям решение обобщенной задачи Дирихле может стремиться к любому пределу, заключенному между $\varphi^+(s_0)$ и $\varphi^-(s_0)$.

В случае нескольких точек разрыва (x_k, y_k), $k=1, 2, \ldots, m$, полагаем

$$u(x, y) = U(x, y) + \sum_{k=1}^{m} \frac{H_k}{\alpha_k} \operatorname{arctg} \frac{y-y_k}{x-x_k},$$

где $U(x, y)$ удовлетворяет на границе условию

$$U(s) = \Phi(s) = \varphi(s) - \sum_{k=1}^{m} \frac{H_k}{\alpha_k} \operatorname{arctg} \frac{y-y_k}{x-x_k}.$$

5. Приведение двумерной задачи Неймана к задаче Дирихле. Введем функцию $v(x, y)$, связанную с гармонической функцией $u(x, y)$ уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Эти уравнения называются *уравнениями Коши — Римана*, иногда *уравнениями Даламбера — Эйлера*.)

Легко проверить дифференцированием первого уравнения по y и второго по x, что если функция v имеет производные второго порядка по x и y, то она будет гармонической, т. е.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция v известна, то функция u находится интегрированием полного дифференциала (с точностью до постоянного слагаемого)

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + C = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C. \quad (3.27)$$

В силу уравнений Коши — Римана

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(s),$$

отсюда на контуре $v=\int\psi(s)\,ds$. Итак, для v мы получаем задачу Дирихле. Решив ее и определив функцию v, находим функцию u в квадратурах по формуле (3.27). Изложенный прием пригоден, если функция u гармонична в односвязной области.

§ 5. Решение краевых задач

1. Решение первой краевой задачи (задачи Дирихле) для круга. Введем полярные координаты r, ϑ; $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$.

Будем искать функцию u, гармоническую внутри круга $r<R$ и принимающую на границе круга $r=R$ заданные значения $u=\varphi(\vartheta)$.

Заданную функцию $\varphi(\vartheta)$ разложим в ряд Фурье. Пусть

$$\varphi(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta); \tag{3.28}$$

как известно,

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\vartheta)\cos n\vartheta\,d\vartheta,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\vartheta)\sin n\vartheta\,d\vartheta.$$

Тогда решение нашей задачи можно представить в виде ряда

$$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta). \tag{3.29}$$

Внешняя задача Дирихле для круга. Ее решение дается формулой

$$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta). \tag{3.30}$$

Интеграл Пуассона. Ряды (3.29) и (3.30) можно просуммировать, результатом суммирования и будут *интегральные формулы Пуассона.* Эти формулы имеют вид

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\vartheta-\theta)+r^2}\,d\theta \tag{3.31}$$

для внутренней задачи Дирихле и

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\frac{r^2-R^2}{R^2-2Rr\cos(\vartheta-\theta)+r^2}\,d\theta \tag{3.32}$$

для внешней задачи Дирихле.

2. Метод конформных отображений. Всякую плоскую односвязную область, ограниченную кусочно гладкой кривой, можно взаимно однозначно отобразить на единичный круг. Задача Дирихле для такой области сводится к внутренней задаче Дирихле для круга.

Обозначим новые независимые переменные через ξ, η. Пусть $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, $\zeta=\zeta(z)$; $\zeta(z)$ — аналитическая функция, реализующая отображение. Тогда

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=\frac{1}{\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2}\left\{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right\}.$$

Как известно,

$$\frac{d\zeta}{dz}\neq\begin{cases}0,\\ \infty\end{cases}$$

и, следовательно, $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$. Разумеется, следует преобразовать и граничные условия.

3. Вторая краевая задача (задача Неймана) для круга. Решение имеет вид

$$u=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\vartheta+B_n\sin n\vartheta),$$

где коэффициенты определяются равенствами

$$nR^{n-1}A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\cos n\theta\,d\theta,$$

$$nR^{n-1}B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\sin n\theta\,d\theta,$$

ψ — заданное на границе значение нормальной производной.

Коэффициент A_0 остается неопределенным, и, таким образом, решение задачи Неймана находится с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Ряд может быть просуммирован и представлен следующим интегралом (*интеграл Дини*):

$$u = \frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\ln\frac{R^2+r^2-2Rr\cos(\vartheta-\theta)}{R^2}\,d\theta. \qquad (3.33)$$

В н е ш н я я з а д а ч а Н е й м а н а д л я к р у г а имеет решением

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются равенствами

$$\frac{nA_n}{R^{n-1}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \qquad \frac{nB_n}{R^{n-1}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\sin n\theta\,d\theta, \qquad n \geqslant 1.$$

Суммирование вновь приводит к интегралу Дини.

Т р е т ь я к р а е в а я з а д а ч а. Решение аналогично, если $h = \text{const}$.

Для внутренней задачи

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$

Для внешней задачи

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$

Коэффициенты A_n, B_n для внутренней задачи определяются из уравнений:

$$A_n R^{n-1}(n+hR) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\cos n\theta\, d\theta,$$

$$B_n R^{n-1}(n+hR) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\sin n\theta\, d\theta,$$

$$hA_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\, d\theta.$$

Для внешней задачи они определяются из аналогичных уравнений, в которых n заменяется на $-n$.

4. Решение задачи Дирихле для кольца, образованного двумя концентрическими окружностями. Пусть $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$; при $r = R_1$ $u = \varphi_1(\vartheta)$, при $r = R_2$ $u = \varphi_2(\vartheta)$.

В области, не содержащей начала координат, ограниченным решением будет

$$u = \frac{A_0}{2} + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi). \quad (3.34)$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются из граничных условий:

$$A_n = \frac{R_2^n a_n^{(2)} - R_1^n a_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, \quad B_n = \frac{R_2^n b_n^{(2)} - R_1^n a_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}},$$

$$C_n = \frac{R_2^n a_n^{(1)} - R_1^n a_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, \quad D_n = \frac{R_2^n b_n^{(1)} - R_1^n b_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}},$$

$$A_0 = \frac{a_0^{(1)} - a_0^{(2)}}{\ln \frac{R_1}{R_2}}, \quad D_0 = \frac{a_0^{(2)} \ln R_1 - a_0^{(1)} \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}};$$

$a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $b_i^{(2)}$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi_1(\vartheta)$ и $\varphi_2(\vartheta)$.

5. Вторая краевая задача (задача Неймана) для кольца. Решением будет по-прежнему ряд (3.34). Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются из граничных условий:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{r=R_1}=-\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=-F_1(\varphi),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{r=R_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2}=F_2(\varphi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{D_0}{r}+\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{r^{n+1}}(C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi),$$

$$nR_1^{n-1}A_n-\frac{n}{R_1^{n+1}}C_n=a_n^{(1)},\quad nR_2^{n-1}A_n-\frac{n}{R_2^{n+1}}C_n=a_n^{(2)},$$

$$nR_1^{n-1}B_n-\frac{n}{R_1^{n+1}}D_n=b_n^{(1)},\quad nR_2^{n-1}B_n-\frac{n}{R_2^{n+1}}D_n=b_n^{(2)},$$

$$D_0=\frac{a_0^{(2)}R_1}{2}=-\frac{a_0^{(1)}R_2}{2};$$

$a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(1)}$, $b_n^{(2)}$ — коэффициенты Фурье функций $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$; следует иметь в виду, что $a_0^{(2)}R_1=a_0^{(1)}R_2$, так как

$$\int\limits_{r=R_1} F_1\,dS+\int\limits_{r=R_2} F_2\,dS=0.$$

Решение третьей краевой задачи проводится аналогично, если $h=\text{const}$.

6. Первая краевая задача для цилиндра. Цилиндр ограничен плоскостями $z=0$, $z=l$ и поверхностью $r=a$.

Обозначим через u_1 гармоническую функцию, обращающуюся в нуль на ограничивающих плоскостях, а на боковой поверхности принимающую заданные значения

$$u_1|_{r=a}=f(\varphi,\ z).$$

Пусть, далее, u_2 и u_3 — гармонические функции, обращающиеся в нуль на боковой поверхности цилиндра и на одном из оснований, а на другом принимающие заданные значения

$$u_2|_{z=0}=\psi_1(r,\ \varphi),\quad u_3|_{z=0}=\psi_2(r,\ \varphi);$$

тогда

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + B_{nm}^{(1)} \sin n\varphi) \frac{I_n\left(\frac{\pi m}{l} r\right)}{I_n\left(\frac{\pi m}{l} a\right)} \sin \frac{\pi m}{l} z,$$

I — модифицированная функция Бесселя первого рода,

$$A_{nm}^{(1)} = \frac{2}{\pi l (1+\delta_{n0})} \int_0^{2\pi} \int_0^l f(\varphi, z) \cos n\varphi \sin \frac{\pi m}{l} z \, d\varphi \, dz,$$

$$B_{nm}^{(1)} = \frac{2}{\pi l} \int_0^{2\pi} \int_0^l f(\varphi, z) \sin n\varphi \sin \frac{\pi m}{l} z \, d\varphi \, dz,$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm}^{(2)} \cos n\varphi + B_{nm}^{(2)} \sin n\varphi) \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)} (l-z)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)} l}{a}} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right),$$

J — обыкновенная функция Бесселя первого рода, $\mu_m^{(n)}$ — m-й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$,

$$A_{nm}^{(2)} = \frac{2}{\pi a^2 (1+\delta_{n0})} \frac{1}{[J_n'(\mu_n)]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \psi_1 \cos n\varphi J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{a}\right) r \, dr \, d\varphi,$$

$$B_{nm}^{(2)} = \frac{2}{\pi a^2 [J_n'(\mu_n)]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \psi_1 \sin n\varphi \, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{a}\right) r \, dr \, d\varphi;$$

$$u_3 = u_2(r, \varphi, l - z) \text{ с заменой } \psi_1 \text{ на } \psi_2.$$

7. Решение задачи Дирихле для сферы $r \leqslant R$. Рассмотрим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) = 0.$$

Преобразуем его, положив

$$u = Z(r) Y(\varphi, \theta).$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0, \qquad (*)$$

$$r^2Z''+2rZ'-\lambda Z=0. \qquad (**)$$

Решения этого уравнения, ограниченные при $\theta=-\frac{\pi}{2}$ и $\theta=$ $=+\frac{\pi}{2}$, существуют только при $\lambda=n(n+1)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Они называются *шаровыми функциями Лапласа* и выражаются следующим образом:

$$Y_{nm}=P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi, \\ \sin m\varphi,\end{cases} \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

При $m=0$ получаем функции

$$Y_{n0}=P_n(\cos\theta),$$

обладающие осевой симметрией, т. е. не зависящие от φ. Здесь P_n — полиномы Лежандра, а $P_n^{(m)}$ — присоединенные функции Лежандра порядка m.

Общее решение уравнения (**) при $\lambda=n(n+1)$ имеет вид

$$Z_n=C_nr^n+\frac{D_n}{r^n}.$$

Частным решением, ограниченным внутри сферы, будет

$$Z=r^n.$$

Частным решением, ограниченным вне сферы, будет

$$Z_n=\frac{1}{r^n}.$$

Методом суперпозиции построим решение уравнения Лапласа, ограниченное внутри сферы:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left\{\frac{A_{n0}}{2}P_n(\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)\,P_n^{(m)}(\cos\theta)\right\}. \qquad (3.35)$$

Коэффициенты A_{nm}, B_{nm} определяем из граничного условия $u=f(\theta, \varphi)$ при $r=R$, где f — заданная функция,

$$\left.\begin{aligned}
f(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n \left\{ \frac{A_{n0}}{2} P_n(\cos\theta) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta) \right\}, \\
&\text{откуда} \\
A_{nm} &= \frac{1}{R^n} \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \times \\
&\quad \times \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_1(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \\
B_{nm} &= \frac{1}{R^n} \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \times \\
&\quad \times \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_1(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (3.36)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (3.35), меняя местами суммирование и интегрирование и проводя суммирование, придем к формуле Пуассона, справедливой при $r<R$:

$$u = \frac{1}{4\pi} \oint f_1(\theta, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{[R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + r^2]^{3/2}}\, dS. \quad (3.37)$$

При решении внешней задачи множитель r^n в формуле (3.35) заменяется на r^{-n}, в формулах (3.36) R^n заменяется на R^{-n}.

8. Гармонические многочлены от трех независимых переменных. Однородные гармонические многочлены от трех независимых переменных иногда называются *шаровыми функциями.* Их легко построить методом неопределенных коэффициентов. Так, например, гармонический полином второй степени можно построить из общего полинома второй степени

$$P_2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz.$$

Заметив, что $\Delta P_2 = \frac{1}{2}(a+b+c)$, видим, что полином будет гармоническим, если $c = -(a+b)$, откуда

$$u_2 = a(x^2 - z^2) + b(y^2 - z^2) + dxy + eyz + fxz;$$

a, b, d, e, f — произвольные постоянные.

Заметим еще, что $u_0 = a$, $u_1 = ax + by + cz$. Вообще гармонический полином n-й степени u_n содержит $2n+1$ произвольных постоянных и является линейной комбинацией $2n+1$ линейно независимых гармонических полиномов. Так, линейно независимыми гармоническими полиномами второй степени будут $x^2 - z^2$, $y^2 - z^2$, xy, yz, xz.

Всякий гармонический многочлен выражается через лапласову шаровую функцию

$$u_n = r^n Y_n(\theta, \varphi),$$

где r, θ, φ — сферические координаты точки, Y_n — собственные функции уравнения (*).

9. Решение задачи Дирихле для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Положим $u = X(x)\,Y(y)$, получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0,$$

откуда

$$\frac{X''}{X} = -k^2, \quad \frac{Y''}{Y} = +k^2$$

или, наоборот,

$$\frac{X''}{X} = +k^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k^2.$$

Рассмотрим случай, когда на трех сторонах прямоугольника искомая функция равна нулю, а на четвертой стороне, например на стороне $y = 0$, $u = f_1(x)$, где f_1 — произвольная, но достаточно гладкая функция. Мы удовлетворим всем условиям задачи, приняв $k = \frac{n\pi}{a}$, $X = \sin\frac{n\pi}{a}x$, $Y = \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)$,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(b-y)\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Определим коэффициенты A_n из условия

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

откуда

$$A_n=\frac{2}{a\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f_1(\xi)\sin\frac{n\pi}{a}\xi\,d\xi.$$

Если функция u отлична от нуля на стороне $y=b$, где равна $f_2(x)$, а на трех других сторонах равна нулю, то решением будет

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Коэффициенты B_n определяются той же формулой с заменой $f_1(\xi)$ на $f_2(\xi)$.

Если искомая функция отлична от нуля только на стороне $x=0$ и равна здесь $f_3(y)$, то $k=\frac{n\pi}{b}$,

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}(a-x)\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

где

$$C_n=\frac{2}{b\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f_3(\xi)\sin\frac{n\pi}{b}\xi\,d\xi;$$

наконец, если u отлична от нуля только на стороне $x=a$ и равна здесь $f_4(y)$, то

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}y;$$

D_n определяются так же, как и C_n, — заменой f_3 на f_4.

Решение для общего случая граничных условий может быть получено суммированием четырех найденных решений.

Задачу Неймана для прямоугольника рекомендуется свести к задаче Дирихле.

Третья краевая задача для прямоугольника. Найдем гармоническую функцию, которая на трех сторонах прямоугольника, например при $x=0$, $x=a$, $y=0$, удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+hu=0,$$

а на четвертой стороне $x=b$ — условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+hu=\frac{\partial u}{\partial y}+hu=f(x).$$

Положим

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)\,(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_k}y+\gamma_k \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k}y).$$

Здесь $X_k(x)$ — собственные функции третьей однородной краевой задачи дифференциального уравнения $X''+\lambda X=0$ на отрезке $(0, a)$, λ_k — собственные значения этой же краевой задачи, коэффициент γ_k подбирается из условия обращения в нуль выражения

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+hu=-\frac{\partial u}{\partial y}+hu$$

на стороне $y=0$. Отсюда $\gamma_k=\frac{h}{\sqrt{\lambda_k}}$.

Коэффициенты c_k определим из условия

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\{2h\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_k}b+(h\gamma_k+\sqrt{\lambda_k})\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k}b\}X_k(x).$$

Следовательно,

$$c_k=\frac{\int\limits_0^b f(\xi)X_k(\xi)\,d\xi}{\{2h\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_k}b+(h\gamma_k+\sqrt{\lambda_k}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k}b)\}\int\limits_0^b X_k^2(\xi)\,d\xi}.$$

Аналогично строятся решения, для которых

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+hu$$

отлично от нуля поочередно на каждой из остальных сторон. Окончательный результат получается суммированием найденных решений.

10. Решение задачи Дирихле для параллелепипеда. Решение вполне аналогично решению задачи Дирихле для прямоугольника.

Рассмотрим параллелепипед

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c.$$

Легко убедиться, что

$$u_{kn} = \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \operatorname{sh} m_{kn} z,$$

$m_{kn} = \sqrt{\frac{(k\pi)^2}{a^2} + \frac{(n\pi)^2}{b^2}}$, $k = 1, 2, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots$, будет решением уравнения Лапласа, обращающимся в нуль на всех гранях параллелепипеда, кроме грани $z = c$.

Построим решение $u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} u_{kn}$ и определим коэффициенты C_{kn} так, чтобы $u = f_1(x, y)$ при $z = c$, где f_1 — заданная функция:

$$f_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} \operatorname{sh} m_{kn} c \cdot \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

отсюда

$$C_{kn} = \frac{4}{ab \operatorname{sh} m_{kn} c} \int_0^a \int_0^b f_1(\xi, \eta) \sin \frac{k\pi}{a} \xi \sin \frac{n\pi}{b} \eta \, d\xi \, d\eta.$$

Точно так же

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{kn} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \operatorname{sh} m_{kn} (c - z)$$

представляет решение, обращающееся в нуль на всех гранях, кроме грани $z = 0$. На этой грани решение может быть задано как $f_2(x, y)$; D_{kn} определяются, как и C_{kn}, с заменой f_1 на f_2.

Аналогично с заменой z на x и соответственно z на y строятся решения, обращающиеся в нуль на всех гранях, кроме $x = 0$, затем $x = a$, $y = 0$ и, наконец, $y = a$.

Окончательное решение получается суммированием шести найденных решений.

Третья краевая задача решается аналогично тому, как она решена для прямоугольника.

§ 6. Функция Грина (функция источника)

1. Функция Грина для первой краевой задачи уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y, z)$. Пусть u удовлетворяет уравнению Пуассона в замкнутой области D. Согласно фундаментальной формуле

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} dS + \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \frac{f(x, y, z)}{r}\, dx. \tag{3.38}$$

Пусть v — гармоническая функция в области D, тогда

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left\{ v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} dS + \int\limits_D v f\, dx. \tag{3.39}$$

Складывая (3.38) и (3.39), получаем:

$$u(M_0) = \int\limits_S \left\{ G \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial G}{\partial \nu} \right\} dS + \int\limits_D G f(x, y, z)\, dx,$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + v. \tag{3.40}$$

Если удастся определить v так, чтобы на поверхности удовлетворялось равенство $v = -\frac{1}{4\pi r}$, то G на поверхности будет равно нулю, и так как u на поверхности задана, то мы получим явную форму решения первой краевой задачи

$$u(M_0) = -\int\limits_S u \frac{\partial G}{\partial \nu}\, dS - \int\limits_D G f(x, y, z)\, dx.$$

Для уравнения Лапласа $f \equiv 0$ и $u(M_0) = -\int\limits_S u \frac{\partial G}{\partial \nu}\, dS.$

Функция G называется *функцией Грина* или *функцией источника*. Она удовлетворяет следующим условиям:

1) Функция G удовлетворяет уравнению Лапласа в области D всюду, кроме точки $M = M_0$, где она имеет особенность вида $\frac{1}{4\pi r}$.

2) На границе области $G = 0$.

Эти два условия определяют функцию.

3) Функция Грина симметрична относительно точек M и M_0:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Построение функции Грина сводится к решению первой краевой задачи для функции v, принимающей на границе области значение $-\frac{1}{4\pi r}$; таким образом, решив для функции v первую краевую задачу с условиями специального вида, можно находить решения первой краевой задачи для уравнений Лапласа и Пуассона с любыми граничными условиями.

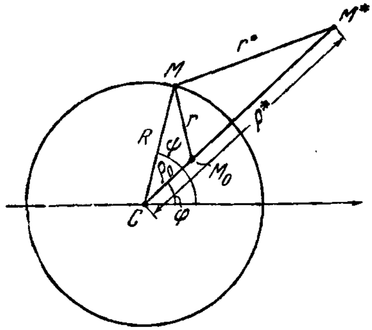

Рис. 3.

Плоский случай:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + v, \quad (3.41)$$

где v — гармоническая функция в области D; на границе $G = 0$ и, следовательно, $v = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$.

Функция Грина для круга:

$$G = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r^*} \right],$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \rho_0^2}{r^2} \quad \text{(на границе области)}.$$

Функция Грина для сферы. Рассмотрим сферу с центром в точке C и радиусом R (рис. 3). Назовем точки M_0 и M^* *симметричными относительно сферы*, если они лежат на одном луче, выходящем из центра сферы, и если $CM_0 \cdot CM^* = R^2$. Легко установить из подобия треугольников CMM_0 и CMM^*, что если M — точка сферы, то

$$\frac{MM_0}{MM^*} = \frac{CM_0}{R} = \frac{R}{CM^*}.$$

Введем функцию $v = -\frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r^*}$, гармоническую внутри сферы (она гармонична всюду, кроме точки M^*); на границе

$v=-\frac{1}{4\pi r}$, и, следовательно, $G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r^*}\right)$. Приводим значение $\frac{\partial G}{\partial n}$ на границе области:

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^3}.$$

Аналогично строится функция Грина для внешности сферы, при этом точки M_0 и M^* меняются местами.

Понятие о функции Грина переносится и на бесконечные области.

Функция Грина для бесконечной полуплоскости ($y>0$):

$$G(M, M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{1}{r}\right)-\ln\left(\frac{1}{r^*}\right)\right],$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0},$$

$$u(M_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0 f_1(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,dx,$$

где $f_1(x)$ — заданные значения функции на оси x.

Функция Грина для полупространства $z>0$. Рассмотрим точки M_0 и M^*, симметричные относительно плоскости $z=0$. Расстояние произвольной точки M до этих точек обозначим через r и r^*; легко видеть, что

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^*}\right)$$

будет функцией Грина для верхнего полупространства,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{z_0}{2\pi r^3}.$$

Решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа дается формулой

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0 f_1(x, y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\,dx\,dy,$$

где $f_1(x, y)$ — заданные значения функции u на плоскости $z=0$.

Решение для уравнения Пуассона получается добавлением слагаемого

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} Gf(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz.$$

2. Метод Грина для решения второй краевой задачи (задачи Неймана) уравнений Лапласа и Пуассона. *Функция Неймана* (или *функция Грина второго рода*) H определяется следующими требованиями: в области D $H=\frac{1}{4\pi r}+v$, где v — гармоническая в D функция, на поверхности S

$$\frac{\partial H}{\partial \nu}=\text{const}.$$

Решение задачи Неймана имеет вид

$$u(M_0)=\int_S H\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS+\int_D Hf(x,\ y,\ z)\,dx+c.$$

Произвольная постоянная c может быть отброшена, так как задача Неймана решается с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Для уравнения Лапласа $f(x,\ y,\ z)=0$ и, следовательно,

$$u(M_0)=\int_S H\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS.$$

Функция Неймана для сферы (внутренняя задача):

$$H=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}+\frac{R}{\rho r^*}-\frac{1}{R}\ln\frac{R^2-\rho\rho^*\cos\gamma+pr^*}{2R^2}\right\},$$

$$H\Big|_S=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{2}{r}-\frac{1}{R}\ln\frac{R-\rho\cos\gamma+r}{2R}\right\}.$$

Обозначения см. на рис. 3. Решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{R}\ln(R-\rho\cos\gamma+r)-\frac{2}{r}\right\}\psi\,dS.$$

В решение уравнения Пуассона добавляется еще одно обычное слагаемое.

Функция Неймана для сферы (внешняя задача):

$$4\pi H=\frac{1}{r}+\frac{R}{r_1\rho}-\frac{1}{R}\ln\frac{R^2-\rho\rho_1\cos\gamma+r_1\rho}{(1-\cos\gamma)\rho\rho_1},$$

$$4\pi H\Big|_S=\frac{2}{r}-\frac{1}{R}\ln\frac{R-\rho\cos\gamma+r}{(1-\cos\gamma)\rho},$$

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_S\psi\left\{\frac{1}{R}\ln\frac{R-\rho\cos\gamma+r}{(1-\cos\gamma)\rho}-\frac{2}{r}\right\}dS.$$

§ 7. Сведения о более общих уравнениях эллиптического типа

1. Уравнение Гельмгольца. Уравнение

$$\Delta u+\lambda u=f\quad(\lambda>0)$$

часто называется *уравнением Гельмгольца.* Встречается при решении волнового уравнения, а также уравнения теплопроводности в результате расщепления решения на множитель, зависящий от координат, и множитель, зависящий от времени.

Уравнению Гельмгольца посвящена гл. IV настоящего справочника.

2. Уравнение

$$\Delta u+a_1(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y}+$$
$$+a_3(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z}-q(x, y, z)u=f(x, y, z). \qquad (3.42)$$

Свойства уравнения определяются знаком функции $q(x, y, z)$. Если $q\geqslant 0$, то свойства уравнения (3.42) во многих отношениях аналогичны свойствам уравнения Пуассона. Так:

а) если a_1, a_2, a_3 и f — дифференцируемые функции, то существует единственное решение задачи Дирихле в области, граница которой удовлетворяет обычным условиям;

б) в случае $f\equiv 0$ для решений справедливы теоремы Гарнака;

в) в случае $f\equiv 0$ и $q\equiv 0$ для решений справедлив принцип максимума;

г) если коэффициенты a_1, a_2, a_3 и f — аналитические функции, то и решения будут аналитическими функциями.

1) Рассмотрим частный случай: $a_1=a_2=a_3=0$, $f=0$,

$$\Delta u - q(x, y, z)u = 0, \tag{3.43}$$

где $q \geqslant 0$; помимо свойств а), б) и г), справедлив принцип максимума в следующей ослабленной форме:

Решения уравнения (3.43), определенные и непрерывные в замкнутой области, не могут во внутренних точках области иметь положительных наибольших и отрицательных наименьших значений.

2) Пусть имеем

$$\Delta u - k^2 u = 0, \tag{3.44}$$

где k — действительное постоянное число (будем считать $k > 0$).

Фундаментальные решения в трехмерном случае. Функции $u_1 = \frac{e^{-kr}}{r}$ и $u_2 = \frac{e^{kr}}{r}$ удовлетворяют уравнению (3.44) всюду, кроме начала координат; их называют *фундаментальными решениями*; первую из них, обращающуюся в нуль на бесконечности, называют также *функцией источника*.

Если под r подразумевать расстояние от точки M до некоторой постоянной точки M_0, то u_1 и u_2 будут удовлетворять уравнению (3.44) всюду, кроме точки M_0.

Интегральное представление решения уравнения (3.44):

$$u(M_0) = -\int\limits_S \left[u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e^{-kr}}{4\pi r}\right) - \frac{e^{-kr}}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right] dS. \tag{3.45}$$

Для неоднородного уравнения

$$\Delta u - k^2 u = f(x, y, z)$$

$$u(M_0) = -\int\limits_S \left[u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e^{-kr}}{4\pi r}\right) - \frac{e^{-kr}}{4\pi r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right] dS + \int\limits_D f\frac{e^{-kr}}{4\pi r}\,dx. \tag{3.46}$$

Фундаментальные решения в двумерном случае. Функции $u_1 = H_0^{(1)}(ikr)$ и $u_2 = H_0^{(2)}(ikr)$ удовлетворяют двумерному уравнению (3.44) всюду, кроме точки $r=0$; $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля нулевого порядка первого рода, $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля нулевого порядка второго рода. Первая из этих функций, обращающаяся в бесконечность при $r=0$ и стремящаяся к нулю при $r \to \infty$, называется *функцией* *источника на плоскости.* Иногда пользуются обозначениями $H_0^{(1)}(ikr) = K_0(kr)$.

Формула (3.45) в плоском случае заменяется следующей:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L \left[u \frac{\partial}{\partial\nu} K_0(kr) - K_0(kr) \frac{\partial u}{\partial\nu} \right] dS;$$

формула (3.46) в плоском случае имеет вид

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L \left[u \frac{\partial}{\partial\nu} K_0(kr) - K_0(kr) \frac{\partial u}{\partial\nu} \right] dS + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D K_0(kr) f(x, y)\, dx\, dy.$$

§ 8. Потенциалы

1. Определение. Функция

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

представляющая потенциал поля в точке $M_0(x, y, z)$, созданного единичной массой (зарядом), находящейся в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, называется *потенциалом* (иногда *ньютоновским потенциалом*). Эта функция симметрична относительно точек M и M_0. Она удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки M_0.

2. Потенциал объемных масс. *Потенциал объемных масс*, распределенных в области D с плотностью $\rho(M) = \rho(\xi, \eta, \zeta)$, выражается интегралом

$$u = \int\limits_D \frac{\rho(M)}{r}\, dx. \qquad (3.47)$$

В области, не заполненной массами, т. е. вне области D, этот интеграл имеет производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа. Ниже область D считается конечной; в этом случае вне области D интеграл (3.47) удовлетворяет неравенству (3.2).

Если точка M_0 лежит внутри области, то интеграл (3.47) является несобственным, но абсолютно сходящимся.

Если плотность $\rho(M)$ непрерывна, то производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ существуют и могут быть вычислены дифференцированием под знаком интеграла:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int_D \rho(M)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,dx=-\int_D \rho(M)\frac{1}{r^3}(x-\xi)\,dx;$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ вычисляются аналогично.

Если плотность $\rho(M)$ удовлетворяет в замкнутой области D условию Липшица с положительным показателем α, то потенциал (3.47) имеет вторые производные, непрерывные в открытой области D. Если $\alpha<1$, то в любой внутренней подобласти вторые производные удовлетворяют условию Липшица с тем же показателем α.

Вторые производные объемного потенциала можно вычислять по формулам

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0}=\int_D \rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)dx-\frac{4\pi}{3}\rho(M_0),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{M_0}=\int_D \rho\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dx$$

и им аналогичным. Расходящиеся интегралы в этих формулах следует понимать как сингулярные, т. е. в смысле их главного значения по Коши [10].

Объемный потенциал (3.47) удовлетворяет внутри области D уравнению Пуассона $\Delta u=-4\pi\rho$.

3. Потенциал простого слоя. *Потенциал простого слоя* — это потенциал масс, распределенных с поверхностной плотностью $\mu(M)$ по некоторой поверхности:

$$u(M_0)=\int_S \frac{\mu(M)}{r}\,dS. \tag{3.48}$$

Мы будем предполагать, что S — замкнутая поверхность, разделяющая пространство на две области — внутреннюю и внешнюю. Мы предположим также, что поверхность S есть поверхность Ляпунова, т. е. удовлетворяет известным *условиям Ляпунова*: 1) в каждой точке поверхности существует определенная нормаль; 2) для каждой точки поверхности существует окрестность, которую прямая, параллельная нормали в этой точке, пересекает не более одного раза; 3) угол, образованный нормалями в двух точках M_0 и M поверхности, не превосходит величины Ar^{δ}, где r — расстояние между точками M_0 и M, A и δ — постоянные, причем $0 < \delta \leqslant 1$; 4) интеграл

$$\int\limits_S \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^2}\, dS,$$

где ν — нормаль к поверхности в точке M, ограничен.

Плотность $\mu(M)$ потенциала простого слоя будем считать непрерывной на S.

Если точка M_0 расположена вне поверхности, то потенциал простого слоя является непрерывной функцией, имеющей производные любых порядков, удовлетворяющей уравнению Лапласа и регулярной на бесконечности.

Если точка M_0 приближается к какой-либо точке поверхности P_0, то интеграл становится несобственным, но остается конечным и функция u остается непрерывной. Если в точке P_0 провести касательную плоскость и вычислить производные от u по любому направлению, лежащему в касательной плоскости, то эти производные будут непрерывны в окрестности P_0 и могут быть вычислены дифференцированием под знаком интеграла; полученные при таком дифференцировании интегралы следует трактовать как главные значения.

Производная по нормали оказывается разрывной в точке P_0. Обозначим через ν направление внешней нормали к S в точке P_0 и через ψ — угол между направлениями ν и $\overline{M_0M}$, где точка M_0 взята на нормали ν. Если точка M_0 не лежит на S, то производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ вычисляется непосредственным дифференцированием под знаком интеграла, что дает

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{M_0} = \int\limits_S \mu(M) \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \int\limits_S \frac{\cos\psi}{r^2}\, \mu(M)\, dS.$$

Пусть теперь $M_0 \to P_0$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ стремится к различным пределам в зависимости от того, стремится M_0 к P_0 изнутри или извне поверхности S. Обозначая эти пределы соответственно значками $+$ и $-$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{P_0}^{(+)} &= \iint_S \frac{\cos\psi}{r^2}\mu(M)\,dS + 2\pi\mu(P_0), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{P_0}^{(-)} &= \int_S \frac{\cos\psi}{r^2}\mu(M)\,dS - 2\pi\mu(P_0), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{P_0}^{(+)} &- \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{P_0}^{(-)} = 4\pi\mu(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

4. Потенциал двойного слоя. Назовем *потенциалом диполя* предел потенциала, создаваемого двумя зарядами противоположного знака $\frac{1}{\varepsilon}$ и $-\frac{1}{\varepsilon}$, помещенными в точках M и M', находящихся на расстоянии ε друг от друга, при $\varepsilon \to 0$. В любой точке M_0

$$u(M_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right],$$

где r, r' — расстояния от точки M_0 до точек M и M'. Раскрывая неопределенность, найдем:

$$u(M_0) = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

Символ $\frac{\partial}{\partial l}$ означает производную в направлении MM', называемом *осью диполя*, φ — угол между вектором $\overline{M_0M}$ и осью диполя.

Потенциалом двойного слоя называется интеграл

$$u(M_0) = -\int_S \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS = \int_S \sigma(M)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\,dS,$$

где $\sigma(M)$ — поверхностная плотность распределения диполей вдоль поверхности S, причем оси диполей совпадают с направлением ν внешней нормали к поверхности. Будем считать, что поверхность S ляпуновская, а плотность $\sigma(M)$ непрерывна на S.

Для точки M_0, лежащей вне поверхности S, интеграл представляет собой функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа и удовлетворяющую на бесконечности неравенству (3.2).

При переходе точки M_0 через поверхность по нормали к ней потенциал двойного слоя испытывает скачок:

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{P_0}^{(+)} &= -\int_S \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS - 2\pi\sigma(P_0), \\ u\Big|_{P_0}^{(-)} &= -\int_S \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS + 2\pi\sigma(P_0). \end{aligned}\right\} \qquad (3.50)$$

Интеграл в формулах (3.50) несобственный и вычислен для случая, когда точка $M_0 = P_0$ лежит на поверхности.

5. Потенциалы простого и двойного слоев в случае двух независимых переменных. Потенциал масс, распределенных вдоль линии L с линейной плотностью $\mu(M)$, равен

$$u(M_0) = \int_L \mu(M)\ln\frac{1}{r}\,ds. \qquad (3.51)$$

Его называют *логарифмическим потенциалом простого слоя.* Для всякой точки M_0, лежащей вне линии L, потенциал будет непрерывной функцией, удовлетворяющей двумерному уравнению Лапласа. На бесконечности функция (3.51) имеет логарифмическую особенность. Интеграл (3.51) остается непрерывным и в том случае, когда M_0 переходит через кривую L, если она является кривой Ляпунова.

Потенциал двойного слоя

$$u(M_0) = -\int_L \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r}\,ds = \int_L \sigma(M)\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial\nu}\,ds \qquad (3.52)$$

также удовлетворяет уравнению Лапласа для точек M_0, лежащих вне кривой L, и удовлетворяет неравенству (3.2) на бесконечности.

Нормальная производная потенциала простого слоя терпит конечный скачок при переходе через кривую L; предельные значения этой производной вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial\nu} = \begin{cases} \displaystyle\int_L \mu(M)\frac{\cos\psi}{r}\,ds + \pi\mu(P_0), \\ \displaystyle\int_L \mu(M)\frac{\cos\psi}{r}\,ds - \pi\mu(P_0) \end{cases} \qquad (3.53)$$

при приближении точки M_0 к P_0 соответственно с внутренней и внешней стороны.

Потенциал двойного слоя также терпит конечный скачок при переходе через кривую L; предельные значения потенциала двойного слоя вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} u^+(P_0) &= -\int_L \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds - \pi\sigma(P_0), \\ u^-(P_0) &= -\int_L \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds + \pi\sigma(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

6. Потенциал масс. Потенциал масс, распределенных в плоской области D,

$$u(M_0) = \iint_D \rho(M)\ln\frac{1}{r}\,dx\,dy$$

удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа вне области D и уравнению Пуассона

$$\Delta u = -2\pi\mu(x, y)$$

в области D, занятой массами.

7. Применение потенциалов для сведéния краевых задач к интегральным уравнениям.

а) Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа. Предположим, что искомая функция есть потенциал двойного слоя с неизвестной поверхностной плотностью $\sigma(M)$:

$$u(M_0) = -\int_S \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS.$$

Для того чтобы эта функция была решением задачи Дирихле, предельное значение u на поверхности S должно равняться заданной граничной функции, которую мы обозначим через $f_1(M)$, но на основании первой из формул (3.50)

$$u\Big|_{P_0}^{(-)} = -2\pi\sigma(P_0) - \int_S \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS = f_1(P_0). \tag{3.55}$$

Полученное уравнение есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Для внешней задачи Дирихле следует обратиться ко второй формуле (3.50), и мы получим:

$$2\pi\sigma(P_0) - \int_S \sigma(M)\frac{\cos\varphi}{r^2}dS = f_1(P). \tag{3.56}$$

б) Задача Неймана. Решение задачи Неймана разыскивается в виде потенциала простого слоя $u = \int_S \frac{\mu(M)}{r}dS$, где $\mu(M)$ — искомая плотность. С помощью формул (3.49) получаем интегральное уравнение

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\int_S \mu(M)\frac{\cos\psi}{r^2}dS = \frac{f_2(P_0)}{2\pi}, \tag{3.57}$$

где $f_2(P_0)$ означает заданное значение нормальной производной.

Для внешней задачи Неймана получаем:

$$\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\int_S \mu(M)\frac{\cos\psi}{r^2}dS = -\frac{1}{2\pi}f_2(P). \tag{3.58}$$

8. Потенциал уравнения

$$\Delta u - k^2u = 0. \tag{3.59}$$

Объемным потенциалом уравнения (3.59) называют интеграл

$$v(M_0) = \int_D \rho(M)\frac{e^{-kr}}{r}dx,$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, а ρ — ограниченная функция, называемая *объемной плотностью*.

Свойства объемного потенциала:

1) для точек M_0, лежащих вне области D, $\Delta v - k^2v = 0$;

2) для точек M_0, лежащих внутри области, интеграл является несобственным, но сходящимся и допускающим одно кратное дифференцирование под знаком интеграла;

3) во внутренних точках области D справедливо соотношение

$$\Delta v - k^2v = -4\pi\rho(M).$$

Потенциалом двойного слоя называют интеграл

$$v(M_0)=\int\limits_S \mu(M)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)dS,$$

где μ называют *поверхностной плотностью.*

Свойства потенциала двойного слоя:

1) вне поверхности S $\Delta v - k^2 v = 0$;

2) в точках поверхности интеграл является несобственным, но сходится, если S — поверхность Ляпунова;

3) потенциал в точках поверхности S испытывает разрыв; пусть $v_{(+)}(P_0)$ — предельное значение функции v при подходе к поверхности изнутри области D, $v_{(-)}(P_0)$ — предельное значение при подходе извне. Тогда

$$v_{(+)}(P_0)=v(P_0)-2\pi\mu(P_0),$$
$$v_{(-)}(P_0)=v(P_0)+2\pi\mu(P_0).$$

Потенциалом простого слоя называют интеграл

$$v(M_0)=\int\limits_S \sigma(M)\frac{e^{-kr}}{r}ds.$$

Свойства потенциала простого слоя:

1) вне поверхности S $\Delta v - k^2 v = 0$;

2) интеграл равномерно сходится на поверхности и остается непрерывным при переходе через эту поверхность;

3) нормальные производные разрывны при переходе через поверхность.

Для поверхностей Ляпунова имеют место равенства

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_{(+)}=v_0+2\pi\sigma(P_0),$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_{(-)}=v_0-2\pi\sigma(P_0),$$

где

$$v_0=\int\limits_S \rho(P)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{e^{-kr}}{r}dS.$$

Так же, как и для уравнений Лапласа, потенциалы позволяют краевые задачи для уравнения (3.59) сводить к интегральным уравнениям.

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

§ 1. Общие сведения

В этой главе рассматриваются внутренние краевые задачи для следующих уравнений:

1) $$L[v] = \Delta v + \lambda v = 0 \tag{4.1}$$

— однородное уравнение Гельмгольца.

2) $$L[v] = \Delta v + \lambda v = f(x, y, z) \tag{4.2}$$

— неоднородное уравнение Гельмгольца (в двумерном случае $f = f(x, y)$).

Рассматриваются следующие три краевые задачи:

Первая краевая задача. На границе S области D

$$v = \varphi(x, y, z). \tag{4.3}$$

Вторая краевая задача. На границе S области D

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \psi(x, y, z), \tag{4.4}$$

$\frac{\partial v}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали.

Третья краевая задача. На границе области

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + hv = \theta(x, y, z), \tag{4.5}$$

h — неотрицательная функция координат. Чаще всего h кусочно постоянна. В смешанных задачах на разных частях границы заданы различные условия. Если φ, ψ, θ равны нулю, то соответствующие граничные условия называются *однородными*. *Однородной краевой задачей* называем краевую задачу с однородными краевыми условиями для однородных уравнений.

Значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения однородной краевой задачи, называются *собственными значениями* или *собственными числами*, а сами решения — *собственными функциями* данной краевой задачи.

В случае конечной области D множество собственных значений данной краевой задачи образует так называемый *спектр* данной задачи.

1. Формула Грина:

$$\int_D \{v_i L[v_j] - v_j L[v_i]\}\, dx = \int_S \left[v_i \frac{\partial v_j}{\partial \nu} - v_j \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right] dS + (\lambda_i - \lambda_j) \int_D v_i v_j\, dx. \tag{4.6}$$

Здесь v_i и v_j — собственные функции одной из рассматриваемых краевых задач, λ_i и λ_j — соответствующие собственные числа, ν — внешняя нормаль к поверхности S, ограничивающей область D, которая предполагается конечной.

2. Из формулы Грина вытекает свойство ортогональности собственных функций для трех поставленных краевых задач:

$$\int_D v_i v_j\, dx = 0 \qquad (i \neq j). \tag{4.7}$$

3. Собственные функции определены с точностью до постоянного множителя и могут быть нормированы различными способами, в частности требованием

$$\int v_i^2\, dx = 1. \tag{4.8}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, под *нормированными* функциями предполагаем функции, удовлетворяющие равенству (4.8). Величина $\sqrt{\int v_i^2\, dx}$ называется *нормой* v_i и обозначается через $\| v_i \|$.

4. Все собственные значения положительны, за исключением собственных значений второй краевой задачи, для которой существует $\lambda_0 = 0$.

Соответствующая собственная функция $v_0 = \text{const}$.

5. Наименьшее собственное значение для первой краевой задачи есть минимум функционала

$$I(u)=\int\limits_D \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} dx \tag{4.9}$$

при условии

$$\|u\|^2=\int\limits_D u^2\,dx=1 \tag{4.10}$$

в классе непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на границе. Этот минимум реализуется первой нормированной собственной функцией.

Собственные числа каждой краевой задачи всегда будем располагать в порядке возрастания. Тогда

6. k-е собственное число первой краевой задачи есть минимум функционала (4.9) при условии (4.10) и дополнительных условиях

$$\int\limits_D uv_i\,dx=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1; \tag{4.11}$$

как и в п. 5, предполагается, что функции сравнения *) обращаются в нуль на границе области.

7. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ первые $k-1$ собственных чисел второй краевой задачи, а $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ — соответствующие им собственные функции; k-е собственное число второй краевой задачи равно минимуму функционала (4.9) при условиях (4.10) и (4.11), но на более широком классе функций сравнения: эти последние предполагаются непрерывно дифференцируемыми в замкнутой области, но не должны удовлетворять никаким краевым условиям. Таким образом, краевые условия второй задачи являются естественными.

8. Сказанное в п. 7 переносится на третью краевую задачу с одним-единственным изменением: собственные числа третьей краевой задачи получаются как минимумы не функционала (4.9), а функционала

$$\int\limits_D \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} dx+\int\limits_S hu^2\,dS, \tag{4.12}$$

где $h=\text{const}>0$.

---

*) *Функциями сравнения* называются все функции, удовлетворяющие определенным условиям, из которых определяются функции, дающие экстремум функционалу.

9. Собственные значения первой краевой задачи не возрастают при расширении области.

10. Собственные числа стремятся к бесконечности с возрастанием их номера.

11. Собственные числа третьей краевой задачи непрерывно зависят от h и возрастают вместе с h.

12. Справедливы следующие асимптотические оценки:

в случае трехмерной области

$$\lim \frac{n}{\lambda_n^{3/2}} = \frac{V}{6\pi^2}; \tag{4.13}$$

в случае двумерной области

$$\lim \frac{n}{\lambda_n} = \frac{1}{4\pi} S; \tag{4.14}$$

здесь S — площадь двумерной области, а V — объем трехмерной области.

13. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y, z)$, удовлетворяющая граничным условиям краевой задачи, может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям этой краевой задачи:

$$\left. \begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k, \\ c_k &= \frac{\int f v_k \, dx}{\| v_k \|^2}. \end{aligned} \right\} \tag{4.15}$$

Если f суммируема с квадратом, то ряд сходится в среднем.

§ 2. Разделение переменных в двумерном уравнении

1. Прямоугольная область $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$. Полагаем

$$v = X(x)\, Y(y).$$

Подставляя в уравнение (4.1), имеем:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0,$$

откуда

$$\frac{X''}{X} = -\mu, \quad \frac{Y''}{Y} = -\nu, \quad \lambda = \mu + \nu,$$

или

$$X'' + \mu X = 0, \quad Y'' + \nu Y = 0.$$

Переменные разделены, краевые задачи для X и Y решаются независимо.

Первая краевая задача: $X = 0$ в точках $x = 0$ и $x = l_1$, $Y = 0$ в точках $y = 0$, $y = l_2$. Находим:

$$X_k = \sin\frac{k\pi}{l_1}x, \quad Y_m = \sin\frac{m\pi}{l_2}y,$$

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\nu_m = \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Собственные функции (их удобно отмечать двойным индексом):

$$v_{km} = \sin\frac{k\pi}{l_1}x \sin\frac{m\pi}{l_2}y.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{km} = \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2.$$

Узловые линии (линии $v_{km} = 0$) образуют прямоугольную сетку.

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|v_{km}\|^2 = \frac{l_1 l_2}{4}.$$

Вторая краевая задача. Собственные значения:

$$\lambda_{km} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right), \qquad k, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Собственные функции:

$$v_{km} = \cos\frac{\pi k}{l_1}x \cos\frac{\pi m}{l_2}y.$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{km}\|^2 = \frac{l_1 l_2}{4}(1 + \delta_{k0})(1 + \delta_{m0});$$

δ_{ij} здесь и в дальнейшем — символ, обозначающий единицу при $i = j$ и нуль при $i \neq j$.

Третья краевая задача. Пусть h кусочно постоянна:

$$\begin{aligned} h&=h_1 \text{ на стороне } x=0,\\ h&=h_2 \quad » \quad » \quad x=l_1,\\ h&=h_3 \quad » \quad » \quad y=0,\\ h&=h_4 \quad » \quad » \quad y=l_2. \end{aligned}$$

Собственные значения: $\lambda_{km}=\mu_k^2+\nu_m^2$, где μ_k, ν_m — корни уравнений

$$\operatorname{tg}\mu l_1=\frac{(h_1+h_2)\mu}{\mu^2-h_1h_2}, \qquad \operatorname{tg}\nu l_2=\frac{(h_3+h_4)\nu}{\nu^2-h_3h_4}.$$

Собственные функции:

$$v_{km}=(\mu_k\cos\mu_k x+h_1\sin\mu_k x)(\nu_m\cos\nu_m y+h_3\sin\nu_m y).$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{km}\|^2=\left\{\frac{l_1}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\mu_k^2+h_1h_2)}{(\mu_k^2+h_1^2)(\mu_k^2+h_2^2)}\right\}\times$$
$$\times\left\{\frac{l_2}{2}+\frac{(h_3+h_4)(\nu_m^2+h_3h_4)}{(\nu_m^2+h_3^2)(\nu_m^2+h_4^2)}\right\}\frac{1}{\sqrt{\mu_k^2+h_1^2}}\,\frac{1}{\sqrt{\nu_m^2+h_2^2}}.$$

Смешанные задачи:

а) На сторонах $x=0$, $x=l_1$ $\quad v=0$,
на сторонах $y=0$, $y=l_2$ $\quad \dfrac{\partial v}{\partial \nu}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.$

Собственные значения:

$$\lambda_{km}=\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}\right), \qquad \begin{aligned} k&=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\\ m&=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}$$

Собственные функции:

$$v_{km}=\sin\frac{k\pi}{l_1}x\cos\frac{m\pi}{l_2}y.$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{km}\|^2=\frac{1}{4}l_1l_2(1+\delta_{m0}).$$

б) На сторонах $x=0$, $y=0$ $\quad v=0$,
на остальных сторонах

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases}$$

Собственные значения:

$$\lambda_{km}=\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{(2k+1)^2}{l_1^2}+\frac{(2m+1)^2}{l_2^2}\right], \qquad k,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Собственные функции:

$$v_{km}=\sin\frac{(2k+1)\,\pi x}{2l_1}\sin\frac{(2m+1)\,\pi y}{2l_2}.$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{km}\|^2=\frac{l_1 l_2}{4}.$$

2. Круговая область. Уравнение (4.1) преобразуем к полярным координатам (см. гл. III, § 1, где приведены выражения для оператора Лапласа в различных координатных системах):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\lambda v=0.$$

Граничные условия задаются на окружности $r=R$. Полагая

$$v=W(r)\,\Phi(\varphi),$$

получим:

$$\frac{r^2W''+rW'+\lambda r^2W}{W}+\frac{\Phi''}{\Phi}=0,$$

отсюда $\frac{\Phi''}{\Phi}=\mathrm{const}$. Для того чтобы v было периодической функцией полярного угла и не менялось при изменении угла на 2π, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\Phi''}{\Phi}=-n^2$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Тогда

$$\Phi_n=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases}$$

Уравнение для W оказывается уравнением Бесселя

$$r^2W''+rW'+(\lambda r^2-n^2)\,W=0.$$

Его решением, конечным во всем круге, включая начало координат, будет

$$W=J_n\left(\sqrt{\lambda}\,r\right).$$

Первая краевая задача. Уравнение $J_n(x)=0$ имеет бесчисленное множество положительных корней, которые мы обозначим через $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}, \ldots$ Очевидно, что

$$\lambda_{nk}=\frac{x_{nk}^2}{R^2}, \quad W_{nk}=J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, r)$$

и собственные функции

$$v_{nk}=J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, r)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases}$$

Узловые линии образуют полярную сетку.

Выделим собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$v_{0k}=J_0(\sqrt{\lambda_{0k}}\, r),$$

для них узловые линии — концентрические окружности.

Квадрат нормы:

$$\| v_{nk}\|^2=\frac{\pi R^2(1+\delta_{n0})}{2x_{nk}^2}[J_n'(x_{nk})]^2.$$

Вторая краевая задача. При $r=R$ $\frac{\partial v}{\partial \nu}=\frac{\partial v}{\partial r}=0.$ Уравнение для x_{nk} заменяется уравнением $J_n'(x)=0$. Теперь под x_{nk} подразумеваем корни этого уравнения.

Собственные значения:

$$\lambda_{nk}=\frac{x_{nk}^2}{R^2}.$$

Собственные функции:

$$v_{nk}=J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, r)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases}$$

В этих формулах $n=0, 1, 2, \ldots$; при $n\neq 0$ k принимает значения $1, 2, \ldots$, но при $n=0$ имеется корень, отмечаемый нулевыми индексами x_{00}, равный нулю. Соответствующая собственная функция $v_{00}=1$.

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$v_{0k}=J_0(\sqrt{\lambda_{0k}}\, r).$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2 = \frac{\pi^2 R^2 (1+\delta_{n0})}{2x_{nk}^2}[x_{nk}^2 - n^2] J_n^2(x_{nk}),$$

$$\|v_{00}\|^2 = \pi R^2.$$

Третья краевая задача. Пусть h — постоянная. Собственные значения:

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{x_{nk}}{R}\right)^2,$$

где x_{nk} — корень номера k уравнения

$$xJ'_n(x) + RhJ_n(x) = 0.$$

Собственные функции:

$$v_{nk} = J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, r)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases} \qquad n=0,\ 1, \ldots;\ k=1,\ 2, \ldots$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2 = \frac{\pi R^2 (1+\delta_{n0})}{2x_{nk}^2}(R^2h^2 + x_{nk}^2 - n^2) J_n^2(x_{nk}).$$

3. Круговое кольцо с центром в начале координат $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$. В этом случае решением уравнения Бесселя, конечным в области, из которой выключено начало координат, будет его общее решение

$$W = CJ_n(\sqrt{\lambda}\, r) + EN_n(\sqrt{\lambda}\, r),$$

где N_n — функция Неймана.

Первая краевая задача. Граничные условия дают

$$\left.\begin{aligned} CJ_n(\sqrt{\lambda}R_1) + EN_n(\sqrt{\lambda}\, R_1) = 0,\\ CJ_n(\sqrt{\lambda}R_2) + EN_n(\sqrt{\lambda}\, R_2) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Условием существования нетривиальных решений будет обращение в нуль определителя системы:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} J_n(\sqrt{\lambda}R_1) & N_n(\sqrt{\lambda}\, R_1)\\ J_n(\sqrt{\lambda}R_2) & N_n(\sqrt{\lambda}\, R_2)\end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение определяет счетное множество положительных корней x_{nk} и собственных значений

$$\lambda_{nk} = x_{nk}^2,\quad n=0,\ 1, \ldots;\ k=1,\ 2, \ldots$$

Отношение C/E также определяется системой (*). Мы можем положить

$$C = N_n(x_{nk}R_1),$$
$$E = -J_n(x_{nk}R_1).$$

Собственные функции:

$$v_{nk} = \{J_n(x_{nk}r)N_n(x_{nk}R_1) - \\ - J_n(x_{nk}R_1)N_n(x_{nk}r)\}\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases} \tag{4.16}$$

Узловые линии собственных функций образуют полярную сетку.

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi x_{nk}^2}\,\frac{J_n^2(x_{nk}R_1) - J_n^2(x_{nk}R_2)}{J_n^2(x_{nk}R_2)}.$$

Собственные функции с индексом $n=0$ обладают осевой симметрией.

Вторая краевая задача:

$$D(x) = J_n'(R_1x)N_n'(R_2x) - J_n'(R_2x)N_n'(R_1x) = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_{nk} = x_{nk}^2$, где k — номер корня. При $n=0$ имеется корень $x_{00}=0$, соответствующая собственная функция $v_{00}=1$.

Собственные функции v_{nk} определяются формулой (4.16), но с изменившимся значением x_{nk}.

Квадрат нормы:

$$\|v_{00}\|^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2),$$

$$\|v_{nk}\|^2 = \\ = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi x_{nk}^2}\left\{\left(1 - \frac{n^2}{R^2x_{nk}^2}\right)\left[\frac{J_n'(x_{nk}R_1)}{J_n'(x_{nk}R_2)}\right]^2 - \left(1 - \frac{n^2}{R_1^2x_{nk}^2}\right)\right\}.$$

Третья краевая задача (h — постоянная). Собственные функции:

$$v_{nk} = \{J_n(x_{nk}r)A(R_1) - N_n(x_{nk}r)B(R_1)\}\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

где

$$A(R_1) = J_n'(x_{nk}R_1) - \frac{h}{x_{nk}}J_n(x_{nk}R_1),$$

$$B(R_1) = N_n'(x_{nk}R_1) - \frac{h}{x_{nk}}N_n(x_{nk}R_1),$$

x_{nk} — корень номера k уравнения

$$A(R_1x)\,B(R_2x) - A(R_2x)\,B(R_1x) = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_{nk} = x_{nk}^2$.

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2 = (1+\delta_{n0})\frac{2}{\pi x_{nk}^2}\left\{\frac{A^2(R_1)}{A^2(R_2)}\left(1 - \frac{n^2 - R_2^2h}{R_2^2x_{nk}^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{n^2 - R_1^2h^2}{R_1^2x_{nk}^2}\right)\right\}.$$

4. Круговой сектор радиуса R с центральным углом α_0. Первая краевая задача. Собственные функции:

$$v_{nk} = J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}\left(x_{nk}\frac{r}{R}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha_0}\varphi,$$

где x_{nk} определяются уравнением

$$J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk}) = 0.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nk} = \frac{x_{nk}^2}{R^2}.$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2 = \frac{R^2\alpha_0}{4}\left[J'_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk})\right]^2.$$

Вторая краевая задача. Собственные функции:

$$v_{nk} = J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}\left(x_{nk}\frac{r}{R}\right)\cos\frac{n\pi}{\alpha_0}\varphi, \quad v_{00} = 1;$$

x_{nk} определяются уравнением $J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk}) = 0$.

Собственные значения:

$$\lambda_{nk} = \frac{x_{nk}^2}{R^2}.$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2 = \frac{\alpha_0R^2}{4}(1+\delta_{n0})\left(1 - \frac{n^2}{x_{nk}^2}\right)J^2_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk}), \quad \|v_{00}\|^2 = \frac{R^2\alpha_0}{2}.$$

Третья краевая задача: h кусочно постоянна, при $r=R$ $h=h_0$, при $\varphi=\alpha_0$ $h=h_2$, при $\varphi=0$ $h=h_1$.

Собственные функции:

$$v_{nk}=J_{\nu_n}\left(x_{nk}\frac{r}{R}\right)\frac{\nu_n\cos\nu_n\varphi+h_1\sin\nu_n\varphi}{\sqrt{\nu_n^2+h_1^2}}.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nk}=\frac{x_{nk}^2}{R^2},\qquad n,\ k=1,\ 2,\ldots;$$

ν_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\nu\alpha_0=\frac{(h_1+h_2)\nu}{\nu^2-h_1h_2},$$

x_{nk} — корни уравнения

$$xJ_{\nu_n}(x)+\alpha_0h_0J_{\nu_n}(x)=0.$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2=\left\{\frac{\alpha_0}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\nu_n^2+h_1h_2)}{(\nu_n^2+h_1^2)(\nu_n^2+h_2^2)}\right\}\frac{R}{2}\left[1+\frac{R^2h_0-\nu_n^2}{x_{nk}^2}\right]J_{\nu_n}^2(x_{nk}).$$

5. Кольцевой сектор. Область определяется неравенствами

$$R_1\leqslant r\leqslant R_2,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha_0.$$

Первая краевая задача. Собственные функции:

$$v_{nk}=\left\{J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk}r)N_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk}R_1)-\right.$$
$$\left.-J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk}R_1)N_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(x_{nk}r)\right\}\sin\frac{n\pi}{\alpha_0}\varphi,$$

где x_{nk} — корни уравнения

$$J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(xR_1)N_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(xR_2)-J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(xR_2)N_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}(xR_1)=0.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nk}=x_{nk}^2.$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{nk}\|^2=\frac{\alpha_0}{\pi^2x_{nk}^2}\,\frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}^2(x_{nk}R_1)-J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}^2(x_{nk}R_2)}{J_{\frac{n\pi}{\alpha_0}}^2(x_{nk}R_2)}.$$

§ 3. Разделение переменных в трехмерном уравнении

1. Область—прямой параллелепипед

$$0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3.$$

Имеем $v = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$.

Первая краевая задача. Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} + \frac{k^2}{l_3^2}\right).$$

Собственные функции:

$$v_{mnk} = \sin \frac{\pi m}{l_1} x \sin \frac{\pi n}{l_2} y \sin \frac{\pi k}{l_3} z;$$

$$\| v_{mnk} \|^2 = \frac{l_1 l_2 l_3}{8}.$$

Вторая краевая задача. Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} + \frac{k^2}{l_3^2}\right), \qquad m,\ n,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Собственные функции:

$$v_{mnk} = \cos \frac{m\pi}{l_1} x \cos \frac{\pi n}{l_2} y \cos \frac{\pi k}{l_3} z;$$

$$\| v_{mnk} \|^2 = \frac{l_1 l_2 l_3}{8} (1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{k0}).$$

Третья краевая задача, h кусочно постоянна и равна

$$h_1 \text{ при } x = 0, \quad h_3 \text{ при } y = 0, \quad h_5 \text{ при } z = 0,$$

$$h_2 \text{ при } x = l_1, \quad h_4 \text{ при } y = l_2, \quad h_6 \text{ при } z = l_3.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = (\mu_m)^2 + (\nu_n)^2 + (\sigma_k)^2,$$

где μ_m, ν_n, σ_k — положительные корни уравнений:

$$\operatorname{tg} \mu l_1 = \frac{(h_1 + h_2)\mu}{\mu^2 - h_1 h_2}, \quad \operatorname{tg} \nu l_2 = \frac{(h_3 + h_4)\nu}{\nu^2 - h_3 h_4},$$

$$\operatorname{tg} \sigma l_3 = \frac{(h_5 + h_6)\sigma}{\sigma^2 - h_5 h_6}.$$

Собственные функции:

$$v_{mnk} = (\mu_m \cos \mu_m x + h_1 \sin \mu_m x)(\nu_n \cos \nu_n y + h_3 \sin \nu_n y) \times \\ \times (\sigma_k \cos \sigma_k z + h_5 \sin \sigma_k z);$$

$$\| v_{mnk} \|^2 = \left\{ \frac{l_1}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\mu_m^2 + h_1 h_2)}{(\mu_m^2 + h_1^2)(\mu_m^2 + h_2^2)} \right\} \left\{ \frac{l_2}{2} + \frac{(h_3 + h_4)(\nu_n^2 + h_3 h_4)}{(\nu_n^2 + h_3^2)(\nu_n^2 + h_4^2)} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{l_3}{2} + \frac{(h_5 + h_6)(\sigma_k^2 + h_5 h_6)}{(\sigma_k^2 + h_5^2)(\sigma_k^2 + h_6^2)} \right\} \frac{1}{\mu_n^2 + h_1^2} \, \frac{1}{\nu_n^2 + h_3^2} \, \frac{1}{\sigma_n^2 + h_5^2}.$$

2. Круговой цилиндр $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$. В круговых цилиндрических координатах уравнение (4.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0.$$

Полагаем

$$v = W(r)\,\Phi(\varphi)\,Z(z).$$

Разделяем переменные и полагаем

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -n^2, \quad \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad \text{где } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots;$$

$$\frac{Z''}{Z} = -\mu^2, \quad Z = C \cos \mu z + D \sin \mu z;$$

$$r^2 W'' + r W' + [(\lambda - \mu^2) r^2 - n^2] W = 0, \quad W = J_n(\sqrt{\nu_n}\, r),$$

$$\nu^2 = \lambda - \mu^2.$$

П е р в а я к р а е в а я з а д а ч а. В этом случае $C = 0$,

$$\mu_k^2 = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, \qquad k = 1,\ 2, \ldots,$$

$$\nu_{nj}^2 = \frac{x_{nj}^2}{R^2}, \qquad j = 1,\ 2, \ldots,$$

здесь x_{nj} — корни уравнения $J_n(x) = 0$.

Собственные значения:

$$\lambda_{nkj} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{x_{nj}^2}{R^2}.$$

Собственные функции:

$$v_{nkj} = J_n\left(x_{nj}\frac{r}{R}\right)\sin\frac{k\pi}{l}z\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi;\end{cases}$$

$$\|v_{nkj}\|^2 = \frac{\pi l R^2}{4}(1+\delta_{n0})[J_n'(x_{nj})]^2.$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$v_{0kj} = J_0(x_{0j}r)\sin\frac{k\pi}{l}z.$$

Вторая краевая задача:

$$D=0,\quad Z=\cos\frac{k\pi}{l}z,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

$$W = J_n\left(x_{nj}\frac{r}{R}\right),\qquad j=0,\ 1,\ldots,$$

где x_{nj} — корни уравнения $J_n'(x)=0$.

Собственные значения:

$$\lambda_{nkj} = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 + \left(\frac{x_{nj}}{R}\right)^2.$$

Собственные функции:

$$v_{nkj} = \cos\frac{k\pi}{l}zJ_n\left(x_{nj}\frac{r}{R}\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi;\end{cases}$$

$$\|v_{nkj}\|^2 = \frac{\pi l R^2}{4x_{nj}^2}J_n^2(x_{nj})[x_{nj}^2 - n^2](1+\delta_{n0}).$$

Существует собственное значение $\lambda=0$ и соответствующая собственная функция, равная 1. Квадрат ее нормы равен объему цилиндра: $\pi R^2 l$.

Третья краевая задача:

$$h \text{ кусочно постоянна и } = \begin{cases} h_0 & \text{при } z=R,\\ h_1 & \text{при } z=0,\\ h_2 & \text{при } z=l.\end{cases}$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nmk} = \nu_k^2 + \left(\frac{x_{nm}}{R}\right)^2,$$

ν_k — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\nu l = \frac{(h_1+h_2)\nu}{\nu^2 - h_1h_2},$$

x_{nm} — корни уравнения

$$xJ_n'(x)+Rh_0J_n(x)=0.$$

Собственные функции:

$$v_{nmk}=\frac{\nu_k\cos\nu_k z+h_1\sin\nu_k z}{\sqrt{\nu_k^2+h_1^2}}J_n\left(x_{nm}\frac{r}{R}\right)\left\{\begin{array}{l}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi;\end{array}\right.$$

$$\|v_{nmk}\|^2=\frac{\pi a^2}{2x_{nm}^2}(1+\delta_{n0})\left[R^2h_0^2+x_{nm}^2-n^2\right]J_n^2(x_{nm})\times$$

$$\times\left\{\frac{l}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\nu_k^2+h_1h_2)}{(\nu_k^2+h_1^2)(\nu_k^2+h_2^2)}\right\}.$$

3. Полый круговой цилиндр. Область изменения переменных: $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant z\leqslant l$.

Первая краевая задача. Собственные значения:

$$\lambda_{nmk}=(x_{nm})^2+\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2.$$

Собственные функции:

$$v_{nmk}=\{J_n(x_{nm}r)N_n(x_{nm}R_1)-J_n(x_{nm}R_1)N_n(x_{nm}r)\}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi k}{l}z\left\{\begin{array}{l}\cos n\varphi,\quad n=0,\ 1,\ 2,\dots,\\ \sin n\varphi,\quad m,\ k=1,\ 2,\dots;\end{array}\right.$$

x_{nm} — корни уравнения

$$D(x)=\begin{vmatrix}J_n(xR_1) & J_n(xR_2)\\ N_n(xR_1) & N_n(xR_2)\end{vmatrix}=0;$$

$$\|v_{nmk}\|^2=\frac{l}{\pi x_{nm}^2}(1+\delta_{n0})\frac{J_n^2(x_{nm}R_1)-J_n^2(x_{nm}R_2)}{J_n^2(x_{nm}R_2)}.$$

Вторая краевая задача. В выражении для собственных функций в первой краевой задаче $\sin\frac{\pi k}{l}z$ следует заменить на $\cos\frac{\pi k}{l}z$.

Уравнение для x_{nm} примет вид

$$D(x)=\begin{vmatrix}J_n'(xR_1) & J_n'(xR_2)\\ N_n'(xR_1) & N_n'(xR_2)\end{vmatrix}=0.$$

Изменится также выражение для квадрата нормы. Будут существовать нулевое собственное значение и соответствующая собственная функция, равная единице.

4. Сфера. Введем сферические координаты (см. гл. III, § 1). Уравнение (4.1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\lambda v=0.$$

Полагаем $v=W(r)\,Y(\theta,\varphi)$. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right\}+\\ +\frac{1}{W}\{r^2W''+2rW'+\lambda r^2W\}=0.$$

Обозначая константу разделения через μ, получим следующие уравнения для W и Y:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\mu Y=0,\\ r^2W''+2rW'+(\lambda r^2-\mu)W=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.17}$$

Решения первого уравнения, периодические по φ с периодом 2π и конечные при всех значениях θ (от 0 до π), называются *сферическими функциями Лежандра.*

Продолжим разделение переменных, полагая $Y=Z(\theta)\,\Phi(\varphi)$. Уравнение для Y из (4.17) примет вид

$$\frac{\sin^2\theta\,(\sin\theta Z')}{Z}+\mu^2\sin\theta+\frac{\Phi''}{\Phi}=0.$$

Требование периодичности по φ дает

$$\frac{\Phi''}{\Phi}=-m^2,\quad \Phi=\begin{cases}\cos m\varphi,\\ \sin m\varphi,\end{cases}\quad m=0,\ 1,\ldots$$

Уравнение для Z преобразуем, введя новую переменную $t=\cos\theta$, $-1\leqslant t\leqslant+1$. После преобразований получим:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dZ}{dt}\right]+\left[\mu-\frac{m^2}{1-t^2}\right]Z=0.\tag{$*$}$$

Известно, что решения, конечные на отрезке $[-1,+1]$, существуют только при $\mu=n(n+1)$, где $n=0,\ 1,\ldots$ Эти конечные решения называются *присоединенными функциями Лежандра порядка* m, обозначаются через $P_{nm}(t)$ (иногда $P_n^{(m)}(t)$) и связаны простой зависимостью с полиномами Лежандра:

$$P_{nm}(t) = (\sqrt{1-t^2})^m \frac{d^m}{dt^m} P_n(t),$$

где $P_n(t)$ — полином Лежандра степени n.

Уравнение (*) — уравнение для присоединенных функций Лежандра порядка μ.

Выражение для сферических функций Лежандра находим, перемножая Z и Φ:

$$Y_{nm} = P_{nm}(\cos\theta) \begin{cases} \sin m\varphi, \\ \cos m\varphi. \end{cases}$$

Уравнение для W легко приводится к уравнению Бесселя подстановкой $W = \frac{X}{\sqrt{r}}$.

Действительно, уравнение, определяющее X, будет следующим:

$$r^2X'' + rX' + \left[\lambda r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right] X = 0.$$

Его ограниченным решением в области, содержащей начало координат, будет $X = J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r)$, следовательно,

$$W = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r);$$

легко доказать, что при $r = 0$ W остается ограниченным. Значения λ определяются из граничных условий.

Первая краевая задача. Граничное условие дает $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda R) = 0$. Обозначая корни уравнения $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$ через x_{nk}, получим собственные значения $\lambda_{nk} = \frac{x_{nk}^2}{R^2}$.

Для собственных функций v_{mnk} получаем следующие выражения:

$$v_{mnk} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(x_{nk} \frac{r}{R}\right) Y_{nm}(\theta, \varphi). \qquad (4.18)$$

Собственными функциями, обладающими осевой симметрией (не зависящими от φ), будут $v_{0nk} = P_n(\cos\theta)\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(x_{nk}\frac{r}{R}\right)$.

Собственными функциями, обладающими шаровой симметрией, будут

$$v_{00k} = J_{\frac{1}{2}}\left(x_{0k}\frac{r}{R}\right).$$

Квадрат нормы:

$$\|v_{mnk}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{m0})(m+n)!\,R^3}{(2n+1)(n-m)!\,x_{nk}}\left[J'_{n+\frac{1}{2}}(x_{nk})\right]^2.$$

Вторая краевая задача. Граничным условием будет

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0.$$

Обозначая $\sqrt{\lambda}\, r$ через x, придем к уравнению

$$J'_{n+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2x}J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0.$$

Его корни обозначаем через x_{nk}, тогда $\lambda_{nk} = \left(\frac{x_{nk}}{R}\right)^2$. Для собственных функций сохраняется выражение (4.18), но изменяются, конечно, значения x_{nk}.

Существует нулевое собственное значение и соответствующая собственная функция, равная единице.

Квадрат нормы:

$$\|v_{mnk}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{m0})(n+m)!\,R^3}{(2n+1)(n-m)!\,x_{nk}^2}\,J^2_{n+\frac{1}{2}}(x_{nk})\left[1 - \frac{n(n+1)}{x_{nk}^2}\right]. \qquad (4.19)$$

Третья краевая задача (h постоянна). Значения x_{nk} определяются уравнением

$$J'_{n+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1-2Rh}{x}J_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Выражения для собственных значений и собственных функций сохраняются из второй краевой задачи. Для квадрата нормы можно воспользоваться выражением (4.19), заменив последний множитель на

$$1-\frac{n(n+1)+4Rh(1-Rh)}{x_{nk}^2}.$$

§ 4. Координаты, в которых переменные разделяются

1. Вводные замечания. Достаточным условием для разделения переменных в трехмерном уравнении Гельмгольца является условие представимости произведения коэффициентов Ламе в следующей форме:

$$H_1H_2H_3=f_1(q_1)f_2(q_2)f_3(q_3)\begin{vmatrix}\varphi_{11}(q_1) & \varphi_{12}(q_1) & \varphi_{13}(q_1)\\ \varphi_{21}(q_2) & \varphi_{22}(q_2) & \varphi_{23}(q_2)\\ \varphi_{31}(q_3) & \varphi_{32}(q_3) & \varphi_{33}(q_3)\end{vmatrix}, \quad (4.20)$$

где f_i и φ_{ij} — величины, зависящие только от q_i.

Определитель, входящий в равенство (4.20), называют иногда *определителем Штеккеля.* В дальнейшем он обозначается через $|\varphi_{ij}|$. При выполнении условия (4.20) можно положить

$$v=X_1(q_1)X_2(q_2)X_3(q_3)$$

и получить для функций X_i следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{1}{f_i(q_i)}\frac{d}{dq_i}\left[f_i(q_i)\frac{dX_i}{dq_i}\right]+[\lambda\varphi_{i1}+\mu\varphi_{i2}+\nu\varphi_{i3}]X_i=0, \quad (4.21)$$
$$i=1,\ 2,\ 3.$$

Здесь μ и ν — константы разделения, определяемые из граничных условий, причем $\lambda=\mu+\nu$. Помимо декартовых, круговых, цилиндрических и сферических координат, в которых процесс разделения переменных уже описан, условию (4.20) удовлетворяют координатные системы, сведения о которых приведены в гл. III.

Ниже даются выражения для f_i и $|\varphi_{ij}|$ и приводятся разделенные уравнения.

2. Эллиптические цилиндрические координаты:

$$f_1 = \sqrt{q_1^2 - 1}, \quad f_2 = \sqrt{1 - q_2^2}, \quad f_3 = 1;$$

$$|\varphi_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{q_1^2 - 1} & -1 \\ 1 & \dfrac{1}{1 - q_2^2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\frac{1}{\sqrt{q_1^2 - 1}} \frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{q_1^2 - 1}\, \frac{dX_1}{dq_1}\right) + \left(\lambda + \frac{\mu}{q_1^2 - 1} - \nu\right) X_1 = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - q_2^2}} \frac{d}{dq_2}\left(\sqrt{1 - q_2^2}\, \frac{dX_2}{dq_2}\right) + \left(\lambda + \frac{\mu}{1 - q_2^2} - \nu\right) X_2 = 0,$$

$$\frac{d^2X_3}{dz^2} + \nu X_3 = 0 \qquad (q_3 = z).$$

3. Параболические цилиндрические координаты:

$$f_1 = f_2 = f_3 = 1;$$

$$|\varphi_{ij}| = \begin{vmatrix} 0 & q_1^2 & -1 \\ 0 & q_2^2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\frac{d^2X_1}{dq_1^2} + (\mu q_1^2 - \nu) X_1 = 0,$$

$$\frac{d^2X_2}{dq_2^2} + (\mu q_2^2 + \nu) X_2 = 0,$$

$$\frac{d^2X_3}{dz^2} + (\lambda - \mu) X_3 = 0 \quad (q_3 = z).$$

4. Конические координаты:

$$f_1 = r^2, \quad f_2 = \sqrt{(\alpha^2 - q_2^2)(\beta^2 + q_2^2)},$$

$$f_3 = \sqrt{(\alpha^2 + q_3^2)(\beta^2 - q_3^2)} \qquad (\alpha^2 + \beta^2 = 1);$$

$$|\varphi_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{r^2} & \dfrac{1}{r^2} \\ 0 & \dfrac{1}{q_2^2 - \alpha^2} & \dfrac{1}{q_2^2 + \beta^2} \\ 0 & \dfrac{1}{q_3 + \alpha^2} & \dfrac{1}{q_3^2 - \beta^2} \end{vmatrix};$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dX_1}{dr}\right)+\left(\lambda+\frac{\mu+\nu}{r^2}\right)X_1=0 \qquad (q_1=r),$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2-q_2^2)(\rho^2+q_2^2)}}\frac{d}{dq_2}\left[\sqrt{(\alpha^2-q_2^2)(\beta^2+q_2^2)}\frac{dX_2}{dq_2}\right]+$$
$$+\left(\frac{\mu}{q_2^2-\alpha^2}+\frac{\nu}{q_2^2+\beta^2}\right)X_2=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+q_3^2)(\beta^2-q_3^2)}}\frac{d}{dq_3}\left[\sqrt{(\alpha^2+q_3^2)(\beta^2-q_3^2)}\frac{dX_3}{dq_3}\right]+$$
$$+\left(\frac{\mu}{q_3^2+\alpha^2}+\frac{\nu}{q_3^2-\beta^2}\right)X_3=0.$$

Второе и третье уравнения иногда преобразуются к новым независимым переменным подстановками

$$q_2=\alpha\,\mathrm{cn}\,(\xi,\ \alpha), \qquad q_3=\beta\,\mathrm{cn}\,(\eta,\ \beta),$$

cn — одна из эллиптических функций [10]. При этой подстановке

$$x=r\,\mathrm{dn}\,(\xi,\ \alpha),$$
$$y=r\,\mathrm{sn}\,(\xi,\ \alpha)\,\mathrm{dn}\,(\eta,\ \beta),$$
$$z=r\,\mathrm{cn}\,(\xi,\ \alpha)\,\mathrm{cn}\,(\eta,\ \beta).$$

5. Параболические координаты вращения:

$$f_1=q_1,\quad f_2=q_2,\quad f_3=\sqrt{1-q_3^2};$$

$$|\varphi_{ij}|=\begin{vmatrix} q_1^2 & 1 & \dfrac{1}{q_1^2} \\ q_2^2 & -1 & \dfrac{1}{q_2^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{q_3^2-1} \end{vmatrix};$$

$$\frac{1}{q_1}\frac{d}{dq_1}\left(q_1\frac{dX_1}{dq_1}\right)+\left(\lambda q_1^2+\mu-\frac{\nu}{q_1^2}\right)X_1=0,$$
$$\frac{1}{q_2}\frac{d}{dq_2}\left(q_2\frac{dX_2}{dq_2}\right)+\left(\lambda q_2^2-\mu+\frac{\nu}{q_2^2}\right)X_2=0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-q_3^2}}\frac{d}{dq_3}\left(\sqrt{1-q_3^2}\right)\frac{dX_3}{dq_3}+\frac{\nu}{q_3^2-1}X_3=0.$$

Так как $q_3=\cos\varphi$, то третье уравнение часто преобразуют к независимому переменному φ.

6. Вытянутые сфероидальные координаты:

$$f_1 = q_1^2 - 1, \quad f_2 = 1 - q_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - q_3^2};$$

$$|\varphi_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{q_1^2 - 1} & \dfrac{1}{(q_1^2 - 1)^2} \\ 1 & \dfrac{1}{q_2^2 - 1} & \dfrac{1}{(q_2^2 - 1)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{q_3^2 - 1} \end{vmatrix}.$$

Разделенные уравнения:

$$\frac{1}{q_1^2 - 1}\frac{d}{dq_1}\left[(q_1^2 - 1)\frac{dX_1}{dq_1}\right] + \left(\lambda + \frac{\mu}{q_1^2 - 1} + \frac{\nu}{(q_1^2 - 1)^2}\right) X_1 = 0,$$

$$\frac{1}{1 - q_2^2}\frac{d}{dq_2}\left[(1 - q_2^2)\frac{dX_2}{dq_2}\right] + \left(\lambda + \frac{\mu}{q_2^2 - 1} + \frac{\nu}{(q_2^2 - 1)^2}\right) X_2 = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - q_3^2}}\frac{d}{dq_3}\left[\sqrt{1 - q_3^2}\frac{dX_3}{dq_3}\right] + \frac{\nu}{q_3^2 - 1} X_3 = 0.$$

Напоминаем, что $q_1 = \operatorname{ch}\alpha$, $q_2 = \cos\theta$, $q_3 = \cos\varphi$. Уравнения иногда преобразуются к переменным α, θ, φ.

7. Сплющенные сфероидальные координаты:

$$f_1 = q_1^2 + 1, \quad f_2 = 1 - q_2^2, \quad f_3 = \sqrt{1 - q_3^2};$$

$$|\varphi_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{q_1^2 + 1} & -\dfrac{1}{(q_1^2 + 1)^2} \\ -1 & \dfrac{1}{q_2^2 - 1} & \dfrac{1}{(q_2^2 - 1)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{q_3^2 - 1} \end{vmatrix};$$

$$\frac{1}{q_1^2 + 1}\left[\frac{d}{dq_1}(q_1^2 + 1)\frac{dX_1}{dq_1}\right] + \left(\lambda + \frac{\mu}{q_1^2 + 1} - \frac{\nu}{(q_1^2 + 1)^2}\right) X_1 = 0,$$

$$\frac{1}{1 - q_2^2}\frac{d}{dq_2}\left[(1 - q_2^2)\frac{dX_2}{dq_2}\right] + \left(-\lambda + \frac{\mu}{q_2^2 - 1} + \frac{\nu}{(q_2^2 - 1)^2}\right) X_2 = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - q_3^2}}\frac{d}{dq_3}\left[\sqrt{1 - q_3^2}\frac{dX_3}{dq_3}\right] + \frac{\nu}{q_3^2 - 1} X_3 = 0,$$

$$q_1 = \operatorname{sh}\alpha, \quad q_2 = \cos\theta, \quad q_3 = \cos\varphi.$$

Уравнения иногда преобразуются к переменным α, θ, φ.

8. Эллипсоидальные координаты:

$$f_1=\sqrt{(q_1^2-a^2)(q_1^2-b^2)},\quad f_2=\sqrt{(q_2^2-a^2)(q_2^2-b^2)},$$
$$f_3=\sqrt{(q_3^2-a^2)(q_3^2-b^2)};$$

$$|\varphi_{ij}|=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{q_1^2-a^2} & \dfrac{1}{(q_1^2-b^2)(a^2-b^2)} \\ 1 & \dfrac{1}{q_2^2-a^2} & \dfrac{1}{(q_2^2-b^2)(a^2-b^2)} \\ 1 & \dfrac{1}{q_3^2-a^2} & \dfrac{1}{(q_3^2-b^2)(a^2-b^2)} \end{vmatrix}.$$

Разделенные уравнения иногда преобразуют к новым независимым переменным ξ, η, ζ подстановками

$$q_1=a\frac{\operatorname{dn}\left(\xi, \frac{b}{a}\right)}{\operatorname{cn}\left(\xi, \frac{b}{a}\right)},\quad q_2=a\operatorname{dn}\left(\eta, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right),\quad q_3=b\operatorname{sn}\left(\zeta, \frac{b}{a}\right),$$

cn, dn, sn — эллиптические функции.

9. Параболоидальные координаты:

$$f_1=\frac{1}{q_1}\sqrt{(q_1^2-a^2)(q_1^2-b^2)},\quad f_2=\frac{1}{q_2}\sqrt{(q_2^2-a^2)(q_2^2-b^2)},$$
$$f_3=\frac{1}{q_3}\sqrt{(q_3^2-a^2)(q_3^2-b^2)};$$

$$|\varphi_{ij}|=\begin{vmatrix} q_1^2 & \dfrac{q_1^2}{q_1^2-a^2} & \dfrac{q_1^2}{(q_1^2-a^2)(a^2-b^2)} \\ q_2^2 & \dfrac{q_2^2}{q_2^2-a^2} & \dfrac{q_2^2}{(q_2^2-a^2)(a^2-b^2)} \\ q_3^2 & \dfrac{q_3^2}{q_3^2-a^2} & \dfrac{q_3^2}{(q_3^2-a^2)(a^2-b^2)} \end{vmatrix}.$$

Разделенные уравнения иногда преобразуют к независимым переменным ξ, η, ζ:

$$q_1=a\frac{\operatorname{dn}\left(\xi, \frac{b}{a}\right)}{\operatorname{cn}\left(\xi, \frac{b}{a}\right)},\quad q_2=a\operatorname{dn}\left(\eta, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right),$$
$$q_3=a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2\operatorname{cn}^2\left(\zeta, \frac{b}{a}\right)}}.$$

В некоторых, впрочем весьма редких, случаях удается достаточно просто найти точное решение задачи для области, границы которой не являются координатными линиями или поверхностями, принадлежащими системе координат, в которой переменные разделяются. В качестве примера приводим решение следующей задачи.

10. Первая краевая задача для равнобедренного прямоугольного треугольника. (Уравнения сторон: $x=0$, $y=0$, $y=a-x$.)

Собственные значения:

$$\lambda_{mn}=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2[(m+n)^2+n^2], \qquad m,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Собственные функции:

$$v_{mn}=\sin\frac{\pi}{a}(m+n)x\sin\frac{\pi}{a}ny-\\ -(-1)^m\sin\frac{\pi}{a}(m+n)y\sin\frac{\pi}{a}nx.$$

§ 5. Решение краевых задач для неоднородного уравнения Гельмгольца

Разложим известную функцию f в ряд по собственным функциям данной краевой задачи, предполагая f достаточно гладкой:

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_nv_n; \tag{4.22}$$

для c_n имеем

$$c_n=\frac{\int\limits_D fv_n\,dx}{\|v_n\|^2}.$$

Решение будем искать также в виде ряда по собственным функциям

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_nv_n, \tag{4.23}$$

где γ_n подлежат определению. Подставляя (4.23) в уравнение (4.2) и пользуясь тем, что $\Delta v_n=-\lambda_nv_n$, приводим это уравнение к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\gamma_n(\lambda-\lambda_n)-c_n\}v_n=0,$$

откуда $\gamma_n=\frac{c_n}{\lambda-\lambda_n}$ и окончательно

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\lambda-\lambda_n}v_n. \tag{4.24}$$

1) Если параметр λ не равен ни одному из собственных значений, то существует решение задачи, определяемое рядом (4.24).

2) Если $\lambda=\lambda_k$, то условием существования решения неоднородной задачи будет условие ортогональности функции f к собственной функции v_k:

$$\int_D fv_k\,dx=0.$$

3) Если $\lambda=\lambda_k$ и $\int_D fv_k\,dx\neq 0$, то краевая задача для неоднородного уравнения не имеет решения.

ГЛАВА V

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

§ 1. Эллиптические уравнения и системы [5], [19], [24]

1. Эллиптическое уравнение второго порядка. Линейное уравнение в частных производных второго порядка с n независимыми переменными имеет вид

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x); \tag{5.1}$$

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

Здесь A_{ij}, B_i, C, f — функции независимых переменных x_1, x_2, ..., x_n; эти последние мы будем трактовать как координаты некоторой точки x в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Будем считать, что функции A_{ij}, B_i, C измеримы и ограничены.

Уравнение (5.1) называется *эллиптическим* в некоторой области $D \subset E^n$, если для любой точки $x \subset D$ и для любых вещественных чисел t_1, t_2, ..., t_m выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)t_i t_j\right| \geqslant \mu(x)\sum_{i=1}^{n} t_i^2, \tag{5.2}$$

где $\mu(x)$ — некоторая положительная функция точки $x \in D$. Если при этом существует такая постоянная $\mu_0 > 0$, что $\mu(x) \geqslant \mu_0$ при любом $x \in D$, то эллиптическое уравнение (5.1) называется *невырождающимся*. Для невырождающегося эллиптического уравнения неравенство (5.2) можно заменить следующим более сильным неравенством:

$$\left| \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(x) t_i t_j \right| \geqslant \mu_0 \sum_{i=1}^{n} t_i^2; \tag{5.3}$$

очевидно, для невырождающегося уравнения $\inf \mu(x) > 0$ и можно положить $\mu_0 = \inf \mu(x)$.

Если выполнено неравенство (5.2), то его левая часть не обращается в нуль ни при каких значениях переменных t_i и потому не меняет знака; изменив в случае необходимости знаки обеих частей уравнения (5.1) и обозначения коэффициентов, можно считать, что уравнение (5.1) и неравенство (5.2) имеют соответственно вид

$$-\sum_{i, j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f(x), \tag{5.1a}$$

$$\sum_{i, j=1}^{n} A_{ij} t_i t_j \geqslant \mu(x) \sum_{i=1}^{n} t_i^2; \tag{5.2a}$$

при этом неравенство (5.3) запишется так:

$$\sum_{i, j=1}^{n} A_{ij} t_i t_j \geqslant \mu_0 \sum_{i=1}^{n} t_i^2. \tag{5.3a}$$

Если $\inf \mu(x) = 0$, то эллиптическое уравнение называется *вырождающимся*; об этих уравнениях см. гл. VII настоящего сборника.

Пример. Уравнение Лапласа

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,$$

уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x),$$

уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad k = \text{const},$$

уравнение Шредингера

$$\Delta u + p(x) u = 0$$

суть невырождающиеся эллиптические уравнения; о первых трех уравнениях см. гл. III и IV настоящего сборника.

2. Эллиптические уравнения высших порядков. Линейное уравнение в частных производных порядка $2m$ можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{2m} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = f(x); \quad (5.4)$$

можно считать, что коэффициент $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ не меняется ни при какой перестановке индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Уравнение (5.4) называется *эллиптическим* в области D, если для любых вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_{2m}} t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{2m}} \right| \geqslant \mu(x) \sum_{i=1}^{n} t_i^{2m};$$

$$\mu(x) > 0. \quad (5.5)$$

Пусть все коэффициенты $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ограничены. Эллиптическое уравнение (5.4) называется *невырождающимся*, если $\inf \mu(x) > 0$, и *вырождающимся*, если $\inf \mu(x) = 0$.

Важным примером эллиптического уравнения высшего порядка является *полигармоническое* уравнение

$$\Delta^m u = f(x),$$

где Δ^m означает m-ю итерацию (или, что то же, m-ю степень) оператора Лапласа и определяется рекуррентными соотношениями

$$\Delta^1 u = \Delta u, \quad \Delta^m u = \Delta(\Delta^{m-1} u), \quad m > 1.$$

Имеет место представление

$$\Delta^m u = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{2m}}} =$$

$$= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=2m} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots d x_n^{\alpha_n}}.$$

3. Эллиптические системы уравнений [24]. Пусть система уравнений в частных производных содержит p неизвестных функций $u_1, u_2, \ldots, u_p$, и пусть m_j — порядок входящих в систему старших производных функции u_j. Такую систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{p} \sum A_{ij}^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}(x) \frac{\partial^k u_j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = f_i(x). \qquad (5.6)$$

Внутреннее суммирование совершается по всевозможным значениям индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ от единицы до n; для данного j индекс $k \leqslant m_j$. Рассмотрим определитель порядка p, у которого на пересечении i-й строки и j-го столбца находится элемент

$$\sum A_{ij}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{m_j})}(x)\, t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{m_j}}.$$

Система (5.6) называется *эллиптической* в области D, если при любом $x \in D$ и при любых значениях вещественных переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$, не равных одновременно нулю, упомянутый определитель отличен от нуля.

Если $p = 1$, то система сводится к одному уравнению; в этом случае определение настоящего пункта равносильно определениям пп. 1 и 2.

4. Сильно эллиптические системы [5]. Пусть $2m = \max m_j$. Добавляя в случае надобности члены с коэффициентами, равными нулю, можно записать систему (5.6) в виде

$$\sum_{j=1}^{p} \sum A_{ij}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{2m})} \frac{\partial^{2m} u_j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{2m}}} + T_i u = f_i(x),$$
$$i = 1, 2, \ldots, p, \qquad (5.7)$$

где внутреннее суммирование совершается по всевозможным значениям индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{2m}$ от единицы до n, а $T_i u$ суть дифференциальные операторы от $u_1, u_2, \ldots, u_p$, порядки которых не превосходят $2m - 1$.

Введем в рассмотрение векторы u и f с составляющими $u_1, u_2, \ldots, u_p$ и $f_1, f_2, \ldots, f_p$ соответственно и матрицы p-го порядка $A^{(i_1, i_2, \ldots, i_{2m})}$ с элементами $A_{ij}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{2m})}$.

Известно, что любая матрица A может быть представлена в виде суммы $A = C + K$, где C — симметричная, а K — кососимметричная матрица; для этого достаточно положить

$$C = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad K = \frac{1}{2}(A - A^*),$$

где A^* — матрица, сопряженная с A. В соответствии с этим представим каждую матрицу $A^{(i_1, i_2, \dots, i_{2m})}$ в виде

$$A^{(i_1, i_2, \dots, i_{2m})} = C^{(i_1, i_2, \dots, i_{2m})} + K^{(i_1, i_2, \dots, i_{2m})}.$$

Система (5.7) называется *сильно эллиптической в данной точке* x, если при любых значениях вещественных чисел $t_1, t_2, \dots, t_n$, не равных одновременно нулю, матрица

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2m}=1}^{n} C^{(i_1, i_2, \dots, i_{2m})} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{2m}}$$

будет знакоопределенной. Та же система называется *сильно эллиптической в некоторой области* D, если она сильно эллиптична в каждой точке этой области.

Всякая сильно эллиптическая система одновременно и эллиптична.

§ 2. Методы теории потенциала

1. Уравнение второго порядка. Фундаментальное решение и потенциалы [17]. Для уравнения (5.1) строится функция

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n \sqrt{A(y)}} \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} C_{ij}(y) \times \right. \\ \qquad \left. \times (x_i - y_i)(x_j - y_j) \right)^{-\frac{n-2}{2}}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi \sqrt{A(y)}} \ln \left(\sum\limits_{i,j=1}^{2} C_{ij}(y) \times \right. \\ \qquad \left. \times (x_i - y_i)(x_j - y_j) \right)^{-\frac{1}{2}}, & n = 2. \end{cases} \tag{5.8}$$

Здесь σ_n — площадь поверхности сферы единичного радиуса в n-мерном пространстве (см. стр. 58), A — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

составленной из коэффициентов при вторых производных; C_{ij} — элементы матрицы, обратной матрице (5.9). Функция (5.8) удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Функция $L(x, y)$ называется *функцией Леви* для уравнения (5.1) в некоторой области D, если во всякой замкнутой подобласти $D' \subset D$ равномерно выполняются равенства

$$L - H = O(r^{\lambda+2-m}), \quad \frac{\partial (L-H)}{\partial x_i} = O(r^{\lambda+1-m}),$$

$$\frac{\partial^2 (L-H)}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{\lambda-m}),$$

где λ — положительная постоянная. Очевидно, функция $H(x, y)$ сама является функцией Леви.

Функция Леви, удовлетворяющая однородному уравнению (5.1) при произвольно фиксированном $y \neq x$, называется *фундаментальным решением* этого уравнения.

Примеры. Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в n-мерном пространстве при $n \geqslant 3$ фундаментальным решением является функция

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}}, \quad r = |x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2};$$

при $n = 2$ фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$.

Для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в n-мерном пространстве фундаментальное решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} & c r^{-\frac{n-2}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(kr), \quad \text{если } n \text{ четное,} \\ & c r^{-\frac{n-2}{2}} J_{-\frac{n-2}{2}}(kr), \quad \text{если } n \text{ нечетное,} \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

где J и Y — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, а c — постоянная, значение которой легко вычислить, приняв во внимание вид главных членов функций $Y_{\frac{n-2}{2}}(kr)$ и $J_{-\frac{n-2}{2}}(kr)$.

При помощи фундаментального решения уравнения (5.1) можно построить потенциалы, обобщающие известные ньютоновские потенциалы (см. гл. III). Пусть $L(x, y)$ — фундаментальное решение этого уравнения, D — некоторая область, в которой это решение определено; границу области D обозначим через S. *Объемным потенциалом* с плотностью $\rho(y)$ называется интеграл

$$u(x) = \int_D L(x, y)\, \rho(y)\, dy; \qquad (5.11)$$

потенциалом простого слоя с плотностью $\mu(y)$ называется интеграл

$$v(x) = \int_S L(x, y)\, \mu(y)\, dS_y; \qquad (5.12)$$

наконец, *потенциалом двойного слоя* с плотностью $\sigma(y)$ называется интеграл

$$w(x) = \int_S Q_y L(x, y)\, \sigma(y)\, dS_y; \qquad (5.13)$$

здесь для краткости обозначено

$$Q_y L(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(y) \frac{\partial L}{\partial y_i} \cos(\nu, x_j) + \beta u,$$

где ν — внешняя нормаль к S и β — произвольная функция, заданная и непрерывная на S.

Потенциалы (5.11) — (5.13) обладают свойствами, аналогичными известным (см. гл. III) свойствам для ньютонова потенциала. Перечислим некоторые из них.

Если плотность объемного потенциала (5.11) удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, а разность $K=L-H$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial x_i \partial x_j}=O(r^{\lambda-m}),$$

$$\frac{\partial^2 K(x', y)}{\partial x_i \partial x_j}-\frac{\partial^2 K(x'', y)}{\partial x_i \partial x_j}=O(|x'-x''|R^{\lambda-\alpha-n}),$$

где R — расстояние от точки y до отрезка (x', x''), а постоянная $\lambda>\alpha$, то внутри области D вторые производные потенциала (5.11) удовлетворяют условию Липшица с показателем α; эти производные выражаются формулами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=-\frac{1}{n} C_{ij}(x)\rho(x)+\int\limits_D \frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x_i \partial x_j}\rho(y)\,dy, \qquad (5.14)$$

в которых интегралы следует понимать как сингулярные, т. е. в смысле их главного значения по Коши. Из формулы (5.14) вытекает, что внутри D

$$Lu=-\rho(x). \qquad (5.15)$$

Формулы (5.14) и (5.15) верны в значительно более общем предположении, а именно, что $\rho\in L_p(D)$, где $1<p<\infty$, но в этом случае производные потенциала (5.11) следует понимать как обобщенные в смысле С. Л. Соболева.

Пусть граница S области D удовлетворяет известным условиям Ляпунова (см. гл. III). Пусть точка $x_0\in S$, и пусть l — ориентированная прямая, проходящая через эту точку. Если плотность потенциала простого слоя (5.12) удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем α, то

$$\left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)^{\pm}=\mp\frac{\mu(x_0)}{2a^{(l)}(x_0)}+\int\limits_S \frac{\partial L}{\partial l}\mu(y)\,dS_y. \qquad (5.16)$$

Здесь $\left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)^{+}$, $\left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)^{-}$ означают пределы производной $\frac{\partial v}{\partial l}$ изнутри и извне S соответственно, величина $a^{(l)}(x_0)$ определяется формулой

$$a^{(l)}(x_0) = \frac{1}{\cos(\nu_0, l)} \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x_0) \cos(\nu_0, x_i) \cos(\nu_0, x_j), \quad (5.17)$$

ν_0 — нормаль к S в точке x_0.

В общем случае интеграл в (5.16) — сингулярный; он оказывается интегралом со слабой особенностью в том частном случае, когда l есть направление *конормали* (так называется ось, направляющие косинусы которой пропорциональны величинам $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_0)\cos(\nu_0, x_j)$). В этом случае формула (5.16) верна, если плотность потенциала только непрерывна на S.

При некоторых дополнительных предположениях о коэффициентах дифференциального оператора (5.1) и о фундаментальном решении справедливы предельные формулы для потенциала двойного слоя (5.13):

$$w^{\pm}(x_0) = \pm \frac{1}{2}\sigma(x_0) + \int_S Q_y L(x, y)\sigma(y)\, dS_y. \quad (5.18)$$

Формула (5.18) во всяком случае верна, если плотность потенциала (5.13) непрерывна на S. Интеграл в (5.18) имеет слабую особенность.

2. Задачи Дирихле и Неймана [17]. Рассмотрим уравнение (5.1), предполагая, что его коэффициенты определены в некоторой конечной области D, ограниченной ляпуновской поверхностью S. Пусть коэффициенты A_{ij}, B_i, C удовлетворяют в замкнутой области $\bar{D} = D \cup S$ условию Липшица с положительным показателем α. Всегда можно доопределить эти коэффициенты в дополнение к $\bar{D}$ так, чтобы уравнение оставалось эллиптическим, определитель $A(y)$ был ограничен снизу положительной постоянной, упомянутое выше условие Липшица выполнялось равномерно во всем пространстве. Допустим еще, что $C(x) \leqslant 0$ в области D, а форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) t_i t_j$$

положительная. Можно так продолжить коэффициент $C(x)$, чтобы он был всюду отрицательным и чтобы вне некоторой сферы выполнялось неравенство $C(x) \leqslant -c^2$, где c — постоянная.

При перечисленных условиях можно построить так называемое *главное фундаментальное решение* $G(x, y)$ однородного уравнения (5.1), т. е. фундаментальное решение, которое при достаточно больших r удовлетворяет соотношениям

$$G(x, y) = O(e^{-ar}), \quad \frac{\partial G}{\partial x_i} = O(e^{-ar}),$$

в которых a — некоторая положительная постоянная.

Задача Дирихле для уравнения (5.1) состоит в нахождении функции $u(x)$, которая в области D удовлетворяет данному уравнению, а на границе S — условию

$$u|_S = \varphi(x). \tag{5.19}$$

Решение ищем в виде

$$u(x) = -\int_D G(x, y) f(y)\, dy + 2\int_S Q_y G(x, y)\, \sigma(y)\, dS_y, \tag{5.20}$$

где $G(x, y)$ — упомянутое выше главное фундаментальное решение. Используя формулу (5.18), получаем интегральное уравнение со слабой особенностью для неизвестной плотности $\sigma(x)$ (область D для определенности считаем конечной):

$$\sigma(x_0) + 2\int_S Q_y G(x_0, y)\, \sigma(y)\, dS_y = \\ = \varphi(x_0) + \int_D G(x_0, y) f(y)\, dy, \tag{5.21}$$

для которого верны теоремы Фредгольма. Если $C \leqslant 0$ в D, то уравнение (5.21) имеет единственное решение, подстановка которого в формулу (5.20) дает единственное решение задачи Дирихле. Уравнение (5.21), а с ним и задача Дирихле разрешимы единственным образом и в том случае, когда C может принимать и положительные значения, но область D имеет достаточно малую меру. В общем случае однородная задача Дирихле имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима, если свободный член уравнения (5.21) удовлетворяет некоторым условиям ортогональности, взятым в том же числе.

Задаче Неймана для уравнения (5.1) соответствует краевое условие

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu, x_j)+\beta u\right]_S=\varphi(x_0), \tag{5.22}$$

что можно также представить в виде

$$\left[a\frac{\partial u}{\partial N}+\beta u\right]_S=\varphi(x_0),$$

где N — направление конормали и

$$a=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\cos(\nu, x_j)\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Решение задачи Неймана ищем в виде

$$u(x)=-\int_D G(x, y)f(y)\,dy+2\int_S G(x, y)\mu(y)\,dS_y, \tag{5.23}$$

что в силу формулы (5.16) приводит к интегральному уравнению со слабой особенностью для неизвестной плотности μ (область D опять для простоты считаем конечной):

$$\mu(x_0)-2\int_S\left(a\frac{\partial G}{\partial\nu}+\beta G\right)\mu(y)\,dS_y=$$
$$=-\varphi(x_0)-\int_D\left(a\frac{\partial G}{\partial\nu}+\beta G\right)f(y)\,dy. \tag{5.24}$$

Если $C\leqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ и хотя бы одна из этих функций отлична от тождественного нуля, то уравнение (5.24), а с ним и задача Неймана имеют единственное решение. В общем случае, так же как и для задачи Дирихле, однородная задача Неймана имеет только конечное число линейно независимых решений, а соответствующая неоднородная задача Неймана разрешима, если свободный член уравнения (5.24) удовлетворяет некоторым условиям ортогональности, взятым в том же числе.

3. Задача о косой производной [17], [20], [21]. С этой задачей для уравнения (5.1) связано краевое условие

$$\left[\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\beta u\right]_S=\varphi(x), \tag{5.25}$$

где направление дифференцирования λ отлично, вообще говоря, от направления конормали; поверхность S будем считать ляпуновской.

Решение задачи о косой производной будем искать в виде (5.23); это приводит к интегральному уравнению

$$\mp \frac{\mu(x_0)}{a^\lambda(x_0)} + 2\int\limits_S \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} + \beta G\right)\mu(y)\,dS_y = \\ = \varphi(x_0) + \int\limits_D \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda} + \beta G\right) f(y)\,dy. \qquad (5.26)$$

Уравнение (5.26) сингулярное.

Если направление λ нигде не касательно к поверхности S, то для уравнения (5.26) справедливы теоремы Фредгольма: однородная задача имеет только конечное число линейно независимых решений; соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда свободный член уравнения (5.26) удовлетворяет такому же числу условий ортогональности к решениям однородного сопряженного уравнения.

Если для задачи о косой производной верна теорема единственности, то уравнение (5.26) разрешимо, и притом единственным образом; это имеет место, если, например, область D конечная, $C \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, причем хотя бы одна из этих функций отлична от тождественного нуля.

Случай, когда в некоторых точках поверхности S направление λ касательно к этой поверхности, а число измерений пространства $n > 2$, до настоящего времени полностью не исследован.

Остановимся на случае $n = 2$. В этом случае уравнение (5.1) можно привести к каноническому виду

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y); \qquad (5.27)$$

краевое условие (5.25) можно записать так:

$$\left[\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(s)\frac{\partial u}{\partial s}\right]_S = \varphi(s), \qquad (5.28)$$

где ν — направление нормали и s — направление касательной к контуру S. Как всегда, будем считать, что контур S ляпуновский; допустим еще, что функции $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ непрерывны и $\alpha^2(s) + \beta^2(s) \neq 0$. Тогда индекс*) задачи (5.27), (5.28) равен

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_S d\arg(\alpha(s) + i\beta(s)).$$

*) *Индексом задачи* называется разность между числами линейно независимых решений двух однородных задач — данной и сопряженной.

Для уравнения (5.27) изучена задача с краевым условием

$$\sum_{\substack{i,k=0,\ldots,p \\ i+k\leq p}} \left[a_{ik}(s)\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\,\partial y^k}+\int\limits_S b_{ik}(s, s_1)\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\,\partial y^k}\,dS\right]_S=\varphi(s). \quad (5.29)$$

Относящиеся сюда результаты см. в [4].

4. Полигармоническое уравнение [16]. Это уравнение имеет вид

$$\Delta^m u = f(x). \quad (5.30)$$

Особенно важно бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = f(x),$$

играющее большую роль в теории упругости, особенно в таких ее разделах, как плоская задача и изгиб тонких пластинок. Мы не останавливаемся здесь на использовании метода потенциалов для бигармонического уравнения, так как это должно быть подробно изложено в намечаемом к изданию справочнике по интегральным уравнениям.

Рассмотрим случай произвольного m. Пусть D — область, ограниченная извне достаточно гладкой поверхностью S, $x\in D$, $y\in S$, $r=|x-y|$ и ν — нормаль к S в точке y. Функции

$$K_{m,i}(x, y)=\frac{\cos^{2m-i}(r, \nu)}{r^{n-i}}, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \quad (5.31)$$

удовлетворяют в D однородному полигармоническому уравнению

$$\Delta^m u = 0. \quad (5.32)$$

Рассмотрим функцию

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_S K_{m,i}(x, y)\,\sigma_i(y)\,dS_y. \quad (5.33)$$

Она удовлетворяет уравнению (5.32). Подчинив плотности $\sigma_i(y)$ некоторой системе интегральных уравнений со слабой особенностью, можно добиться того, чтобы функция (5.33) удовлетворяла краевым условиям

$$u\Big|_S=\varphi_0(y), \quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_S=\varphi_1(y), \ldots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}=\varphi_{m-1}(y). \quad (5.34)$$

5. Системы эллиптических уравнений. Методы теории потенциала для эллиптических систем разработаны далеко не в полной мере. Мы ограничимся здесь кратким изложением результатов Я. Б. Лопатинского [15].

Рассмотрим однородную систему уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Ее можно записать в виде

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0. \tag{5.35}$$

Здесь $u(x)$ — искомая p-мерная вектор-функция, $A(\alpha)$ — квадратная матрица порядка p, элементы которой суть полиномы относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — составляющих вектора α; матрица $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ получается заменой α на вектор $\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Будем предполагать, что элементы матрицы $A(\alpha)$ суть формы относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ одной и той же степени m. Требование эллиптичности системы (5.35) влечет за собой условие $\det A(\alpha)\neq 0$ для вещественного не равного нулю вектора α. Дополнительно потребуем (при $n\geqslant 3$ эти требования выполняются автоматически), чтобы произведение pm было четным и чтобы для всякого вещественного ненулевого вектора $\alpha'=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ $n-1$ измерений корни уравнения $\det A(\alpha)=0$ относительно неизвестной α_n были поровну распределены в верхней и нижней полуплоскостях.

Уравнение (5.35) будем рассматривать в полупространстве $x_n>0$; краевые условия зададим в виде

$$\lim_{x_n\to 0} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(x'). \tag{5.36}$$

Здесь $x'=(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; $B(\alpha)$ — матрица, содержащая $\frac{1}{2}pm$ строк и p столбцов; элементы j-й строки этой матрицы суть формы одной и той же степени $m_j<m$. При некоторых условиях гладкости, наложенных на столбец $f(x')$ (об этом подробнее см. [15]), задача (5.35), (5.36) разрешима, если выполнено следующее условие: ранг матрицы

$$\int B(\alpha)A^{-1}(\alpha)(E, \alpha_n E, \ldots, \alpha_n^{m-1}E)\,d\alpha_n \tag{5.37}$$

равен $\frac{1}{2}pm$. В формуле (5.37) интегрирование совершается по положительно ориентированному контуру, лежащему в верхней полуплоскости α_n и охватывающему все лежащие в этой полуплоскости корни уравнения $\det A(\alpha)=0$. В той же формуле (5.37) E означает единичную матрицу порядка p, а

$$(E, \alpha_n E, \ldots, \alpha_n^{m-1}E)=$$
$$=\begin{pmatrix} 1, 0, \ldots, 0, \alpha_n, 0, \ldots, 0, \ldots \alpha_n^{m-1}, 0, \ldots, 0 \\ 0, 1, \ldots, 0, 0, \alpha_n, \ldots, 0, \ldots 0, \alpha_n^{m-1}, \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, \alpha_n, \ldots 0, 0, \ldots, \alpha_n^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Перейдем к более общим задачам. Пусть элементы матрицы $A(x, \alpha)$ суть полиномы одной и той же степени m относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и коэффициенты этих полиномов зависят от точки $x \in D$, где D — некоторая область n-мерного евклидова пространства. Будем считать, что упомянутые коэффициенты достаточное число раз непрерывно дифференцируемы (см. [9]) по координатам точки x. Представим матрицу A в виде суммы:

$$A(x, \alpha) = A_0(x, \alpha) + A_1(x, \alpha) + \ldots + A_m(x, \alpha),$$

где элементы матрицы $A_k(x, \alpha)$ суть формы степени $m-k$ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Пусть y — произвольная точка области D, ν — произвольный n-мерный единичный вектор и τ — произвольный ненулевой вектор, ортогональный к вектору ν. Примем, что корни уравнения

$$\det A_0(y, \tau + \lambda\nu) = 0$$

поровну распределены в верхней и нижней λ-полуплоскостях.

Рассматривается система

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \tag{5.38}$$

при краевых условиях

$$\lim_{x \to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(y). \tag{5.39}$$

В формуле (5.39) $y \in S$, где S — граница области D; $B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица из $\frac{1}{2}pm$ строк и p столбцов, причем наибольший порядок дифференцирования в B должен быть меньше n.

Пусть m_k — максимальный порядок дифференцирования, встречающийся в k-й строке матрицы B; через $B_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ обозначим матрицу, k-я строка которой состоит из членов порядка n_k соответствующей строки матрицы B.

Строятся некоторые потенциалы, удовлетворяющие уравнению (5.38); их подстановка в условие (5.39) приводит к системе интегральных уравнений относительно плотностей упомянутых потенциалов. Эта система будет фредгольмовской (точнее, ядра этой системы будут иметь слабую особенность), если данные задачи удовлетворяют определенным условиям гладкости, а ранг матрицы

$$\int B_0(y, \tau + \lambda\nu(y)) A_0^{-1}(y, \tau + \lambda\nu(y))(E, \lambda E, \ldots, \lambda^{m-1}E)\, d\lambda$$

равен $\frac{1}{2}pm$. В последнем интеграле $\nu(y)$ — единичная внешняя нормаль к S; интегрирование совершается по контуру, который, как и выше, расположен в верхней полуплоскости и охватывает все расположенные в этой полуплоскости корни уравнения.

6. Уравнения теории упругости [11], [20]. Метод, изложенный в п. 5, позволяет сводить краевую задачу весьма общего вида для эллиптических систем (также весьма общего вида) к системе интегральных уравнений фредгольмовского типа. Однако эта последняя система в общем случае не равносильна краевой задаче, и интерес представляют те случаи, в которых краевую задачу удается свести к эквивалентной системе интегральных уравнений. При этом нет необходимости требовать, чтобы система интегральных уравнений была фредгольмовской, важно только, чтобы она поддавалась исследованию.

Такого рода случай доставляют, например, основные краевые задачи для трехмерных статических уравнений теории упругости. В случае однородной изотропной среды эти уравнения записываются в векторной форме следующим образом:

$$Au = -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u = F(x). \qquad (5.40)$$

Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор упругих смещений, λ и μ — так называемые *постоянные Ламе*, $F(x)$ — вектор объемных сил. Система (5.40) — эллиптическая, если только величина (называемая *постоянной Пуассона*) $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ отлична от $\frac{1}{2}$ и от 1. Эта система сильно эллиптична при $\sigma < \frac{1}{2}$ и $\sigma > 1$.

Для системы (5.40) обычно ставятся две основные задачи, определяемые краевыми условиями следующих типов:

З а д а ч а I: на поверхности S задан вектор смещений

$$u|_S = g(x), \qquad x \in S. \qquad (5.41)$$

З а д а ч а II: на поверхности задан вектор напряжений

$$p(u) = \sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(u)\,\alpha_k x_j^{(0)} = h(x), \qquad x \in S, \qquad (5.42)$$

где

$$\tau_{jk}(u) = \lambda \operatorname{div} u\,\delta_{jk} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right),$$

α_k — направляющие косинусы внешней нормали к S, $x_k^{(0)}$ — орты координатных осей.

Для векторного уравнения (5.40) известно фундаментальное решение. Это — матрица $V=V(x, y)$, элементы которой определяются формулой

$$v_{jk}(x, y)=\frac{1}{16\pi\mu(1-\sigma)}\left\{\frac{3-4\sigma}{r}\delta_{jk}+\frac{(y_j-x_j)(y_k-x_k)}{r^3}\right\},$$
$$r=|x-y|. \qquad (5.43)$$

Каждый столбец $v_i=\{v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}\}$ удовлетворяет при $x\neq y$ однородному уравнению (5.40).

Для вектора $u(x)$, удовлетворяющего обычным условиям гладкости, верна формула

$$u(x)=\int_D V(x, y)\,Au(y)\,dy-$$
$$-\int_S[P(x, y)\,u(y)-V(x, y)\,p(u)]\,dS_y, \qquad (5.44)$$

где $P(x, y)$ — матрица, i-й столбец которой равен $p(v_i)$.

Интегралы

$$U(x)=\int_D V(x, y)\,\psi(y)\,dy,$$
$$V(x)=\int_S P(x, y)\,\varkappa(y)\,dS_y,$$
$$W(x)=\int_S V(x, y)\,\rho(y)\,dS_y$$

уместно назвать соответственно объемным потенциалом, потенциалом двойного слоя и потенциалом простого слоя. Для них верны теоремы, аналогичные обычным теоремам для ньютоновского потенциала. Так, если плотности $\psi(y)$, $\varkappa(y)$, $\rho(y)$ удовлетворяют условию Липшица с положительным показателем, меньшим единицы, то: 1) объемный потенциал имеет внутри области вторые производные, удовлетворяющие условию Липшица с тем же показателем, при этом $AU=\psi(x)$; 2) для потенциалов двойного и простого слоя верны предельные формулы

$$V^{\pm}(x)=\mp\frac{1}{2}\varkappa(x)+\int_S P(x, y)\,\varkappa(y)\,dS_y, \qquad x\in S; \quad (5.45)$$

$$p^{\pm}(W(x))=\pm\frac{1}{2}\rho(x)+\int_S P'(y, x)\,\rho(y)\,dS_y, \qquad x\in S. \quad (5.46)$$

Знаки «+» и «—» слева означают предельные значения изнутри и соответственно извне S; интегралы в последних формулах — сингулярные.

Как обычно, применение объемного потенциала позволяет свести уравнение (5.40) к однородному. Предполагая, что такое сведение выполнено, будем искать решение задачи I в виде потенциала двойного слоя, а решение задачи II — в виде потенциала простого слоя. В силу формул (5.45) и (5.46) это приводит к интегральным уравнениям:

$$\varkappa(x) - 2\int_S P(x, y)\varkappa(y)\,dS_y = -2g(x), \tag{5.47}$$

$$\varkappa(x) + 2\int_S P(x, y)\varkappa(y)\,dS_y = 2g(x), \tag{5.48}$$

$$\rho(x) + 2\int_S P'(y, x)\rho(y)\,dS_y = 2h(x), \tag{5.49}$$

$$\rho(x) - 2\int_S P'(y, x)\rho(y)\,dS_y = -2h(x), \tag{5.50}$$

соответствующим первой внутренней, первой внешней, второй внутренней и второй внешней задачам; уравнения (5.47) и (5.50), а также уравнения (5.48) и (5.49) сопряжены между собой.

Каждое из уравнений (5.47) — (5.50) на самом деле есть система трех сингулярных интегральных уравнений относительно составляющих неизвестных векторных плотностей. Символические определители этих систем равны между собой и равны $\frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)^2}$, что отлично от нуля при $\sigma = \frac{3}{4}$. Можно доказать, что при $\sigma \neq \frac{3}{4}$ (исключаются также значения $\sigma = \frac{1}{2}$ и $\sigma = 1$, при которых система (5.40) перестает быть эллиптической) для систем интегральных уравнений (5.46) — (5.50) верны теоремы Фредгольма.

При $\sigma = \frac{3}{4}$ однородная задача I может иметь бесконечно много решений. Так, если D есть полупространство $x_3 > 0$, то такими решениями являются векторы $u = x_3 \operatorname{grad} \psi$, где ψ — любая гармоническая в упомянутом полупространстве функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности.

Результаты настоящего пункта переносятся без сколько-нибудь существенных изменений на уравнения установившихся упругих колебаний.

§ 3. Обобщенные решения краевых задач

1. Общая схема [19], [25]. Пусть H — гильбертово пространство и A — оператор, симметричный и положительно определенный в этом пространстве, так что

$$(Au, v) = (u, Av), \quad (Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{5.51}$$

Введем в рассмотрение новое гильбертово пространство H_A, получаемое замыканием области $D(A)$ определения оператора A в метрике, порождаемой скалярным произведением

$$[u, v] = (Au, v); \quad u, v \in D(A).$$

Обобщенным решением уравнения

$$Au = f, \quad f \in H, \tag{5.52}$$

будем называть элемент $u \in H_A$, удовлетворяющий тождеству

$$[u, v] = (f, v), \tag{5.53}$$

в котором v есть произвольный элемент пространства H_A. Такое обобщенное решение существует и единственно.

Зададим оператор $\tilde{A}$, приняв за область его определения множество обобщенных решений уравнения (5.52), соответствующих всевозможным элементам $f \in H$, и положив $\tilde{A}u = f$, где u есть упомянутое обобщенное решение. Оператор $\tilde{A}$ есть самосопряженное расширение оператора A; нижние грани операторов A и $\tilde{A}$ совпадают, а область значений оператора $\tilde{A}$ совпадает с пространством H. Оператор $\tilde{A}$ называется *самосопряженным расширением оператора A по Фридрихсу*; с точки зрения теории расширений М. Г. Крейна $\tilde{A}$ есть *жесткое расширение* оператора A.

Понятие обобщенного решения можно расширить следующим образом. Пусть по-прежнему A — симметричный положительно определенный оператор, и пусть оператор B таков, что произведение $K = A^{-1}B$ ограничено в H_A. Продолжим оператор K по непрерывности на все пространство H_A. Обобщенным решением уравнения

$$(A+B)u=f, \quad f\in H_A, \tag{5.54}$$

назовем элемент $u\in H_A$, который при любом $v\in H_A$ удовлетворяет тождеству

$$[u, v]+[Ku, v]=(f, v). \tag{5.55}$$

Теоремы существования и единственности обобщенного решения для уравнения (5.54) в общем случае не имеют места.

В последующих пунктах настоящего параграфа будут приведены некоторые типы краевых задач, к которым применима приведенная в настоящем пункте общая схема. В качестве пространства H ниже всюду фигурирует пространство $L_2(D)$ скалярных или векторных (в зависимости от характера задачи) функций, суммируемых с квадратом в некоторой конечной области D; в соответствии с этим свободные члены рассматриваемых ниже уравнений предполагаются суммируемыми с квадратом в области D.

2. Самосопряженное эллиптическое уравнение второго порядка [19]. Рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+Cu=f(x), \tag{5.56}$$

где

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}t_it_j\geqslant\mu\sum_{i=1}^{n}t_i^2, \qquad \mu=\text{const}>0,$$

с измеримыми и ограниченными коэффициентами A_{ij} и C; уравнение (5.56) будем считать невырождающимся (см. гл. VII настоящего сборника). Уравнение (5.56) рассмотрим при краевом условии одного из двух типов:

$$u|_S=0, \tag{5.57}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)+\sigma u\right]_S=0, \quad \sigma\geqslant 0. \tag{5.58}$$

При любом из этих краевых условий оператор (5.56) симметричен; он будет также положительно определенным, если

$C(x) \geqslant -\lambda_1$, причем знак неравенства имеет место на множестве положительной меры; здесь λ_1 — наименьшее собственное число оператора

$$-\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

при соответствующем краевом условии (5.57) или (5.58). В частности, в случае условия (5.57), а при $\sigma \not\equiv 0$ также и в случае условия (5.58) достаточно, чтобы $C(x) \geqslant 0$.

3. Самосопряженное эллиптическое уравнение любого порядка. Рассмотрим самосопряженное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \left(A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \right) = \\ = f(x); \qquad (5.59)$$

внутреннее суммирование совершается по обеим группам индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_k$ от единицы до n. Относительно коэффициентов A примем, что они измеримы, ограничены и не меняются ни при какой перестановке верхних или нижних индексов, а также если верхние и нижние индексы поменять местами.

Введем в рассмотрение вспомогательные переменные $t_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; будем считать, что эти переменные не меняются при перестановке индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Уравнение (5.59) будет эллиптическим невырождающимся, если существует такая постоянная $\mu > 0$, что

$$\sum A^{j_1 j_2 \ldots j_m}_{i_1 i_2 \ldots i_m} t_{i_1 i_2 \ldots i_m} t_{j_1 j_2 \ldots j_m} \geqslant \mu \sum t^2_{i_1 i_2 \ldots i_m}. \qquad (5.60)$$

Для уравнения (5.59) поставим краевую задачу с простейшими условиями на границе: потребуем, чтобы на границе S конечной области D обратились в нуль как сама искомая функция u, так и все ее производные до порядка $m-1$ включительно. Оператор этой краевой задачи положительно определен, а сама задача имеет обобщенное решение, если, помимо условия (5.60), выполнено еще следующее условие:

$$\sum A_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k} t_{i_1 i_2 \ldots i_k} t_{j_1 j_2 \ldots j_k} \geqslant 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Это последнее условие можно ослабить.

4. Сильно эллиптические системы [5]. Выделяя главную самосопряженную часть соответствующего дифференциального оператора, можно привести систему уравнений в частных производных к виду

$$(-1)^m \sum \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}} \left(A_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{j_1 j_2 \ldots j_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m}} \right) + \\ + Tu = f(x), \qquad (5.61)$$

где суммирование производится по всем значениям индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ от единицы до n; u — искомая вектор-функция, $A_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{j_1 j_2 \ldots j_m}$ — матрицы, зависимость которых от индексов такая же, как и в п. 3 для коэффициентов $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}$; T — дифференциальный оператор порядка $\leqslant 2m-1$.

Матрицу $A_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{j_1 j_2 \ldots j_m}$ разобьем на сумму симметричной и кососимметричной частей:

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{j_1 j_2 \ldots j_m} = C_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{j_1 j_2 \ldots j_m} + K_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{j_1 j_2 \ldots j_m}.$$

Допустим, что оператор

$$\tilde{C}u = (-1)^m \sum \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}} \left(C_{i_1 i_2 \ldots i_m}^{j_1 j_2 \ldots j_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m}} \right)$$

удовлетворяет следующему условию: на вектор-функциях, которые обращаются в нуль вместе со своими производными до порядка $m-1$ включительно на границе S конечной области D, имеет место неравенство

$$(\tilde{C}u, u) \geqslant M(\Delta^m u, u), \qquad M = \mathrm{const} > 0. \qquad (5.62)$$

При выполнении этого неравенства система (5.61) *сильно эллиптична.*

Будем рассматривать систему (5.61) при только что упомянутых краевых условиях. Эта задача — фредгольмовского типа: при $f(x) \equiv 0$ она имеет только конечное число линейно независимых решений, столько же линейно независимых решений имеет и однородная сопряженная задача. Неоднородная задача (при $f(x) \not\equiv 0$) разрешима тогда и только тогда, когда свободный член $f(x)$ ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной задачи. Наша задача во всяком случае разрешима, если оператор T неотрицателен, т. е. если $(Tu, u) \geqslant 0$ каждый раз, когда функция u удовлетворяет краевым условиям задачи; эта задача разрешима и в том случае, когда область D можно заключить в шар достаточно малого радиуса.

5. Дифференциальные свойства обобщенных решений. В общем случае обобщенное решение сильно эллиптической системы (в частности, одного эллиптического уравнения) порядка $2m$ имеет, в соответствии с определением, обобщенные производные порядка m, суммируемые с квадратом в данной области D. Если коэффициенты системы удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то обобщенное решение имеет обобщенные производные порядка $2m$, суммируемые с квадратом в любой внутренней подобласти D. Если, кроме того, граница области D также достаточно гладкая, то обобщенные производные порядка $2m$ суммируемы с квадратом во всей области D [1], [12], [13], [18], [27]. Если $f(x) \in L_p(D)$, то при определенных условиях гладкости, наложенных на коэффициенты системы и на границу области, можно утверждать, что старшие производные обобщенного решения суммируемы в области D со степенью p [10].

§ 4. Уравнения второго порядка с малым параметром при старших производных [6] — [8]

1. Случай полного вырождения; пограничный слой. Рассмотрим в круге $0 < \rho \leqslant 1$ следующую краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon - u_\varepsilon &= h, \\ u_\varepsilon |_{\rho = 1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

При малых ε естественно ожидать, что решение u_ε близко к $-h$. Однако правая часть, h, вообще говоря, не удовлетворяет граничному условию (5.63), поэтому вблизи границы

$\rho=1$ функция $u_\varepsilon+h$ не будет малой. Возьмем в качестве приближенного решения нашей задачи функцию

$$\tilde{u}_\varepsilon=-h(\rho,\ \varphi)+\psi(\rho)\,h(1,\ \varphi)\,e^{-\frac{1-\rho}{\varepsilon}}, \qquad (5.64)$$

где ρ, φ — полярные координаты, а $\psi(\rho)$ — сглаживающая функция ($\psi(\rho)=0$ при $0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{3}$, $\psi(\rho)=1$ при $\frac{2}{3}\leqslant\rho\leqslant 1$ и $\psi(\rho)$ имеет достаточное количество производных). Нетрудно убедиться в том, что погрешность $z=u_\varepsilon-\tilde{u}_\varepsilon$, получающаяся от замены точного решения приближенным решением (5.64), во-первых, удовлетворяет краевому условию (5.63) и, во-вторых, $\varepsilon^2\Delta z-z=O(\varepsilon)$. Отсюда на основании принципа максимума заключаем, что в круге $0\leqslant\rho\leqslant 1$ будет $z=O(\varepsilon)$. Таким образом, выражение (5.64) дает первое приближение к решению нашей задачи во всей рассматриваемой области. Остановим наше внимание на втором слагаемом в (5.64). Это слагаемое при малых ε существенно отлично от нуля только в непосредственной близости от границы круга $\rho=1$. Функции такого типа называются *функциями типа пограничного слоя.* Дадим точное определение: функция $v_\varepsilon(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, определенная в открытой области D и дифференцируемая $k+1$ раз, является *функцией типа пограничного слоя* k-го порядка, если: 1) v_ε и все ее производные до $(k+1)$-го порядка включительно равномерно стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$ на любом замкнутом подмножестве D; 2) j-е производные v_ε $(j<k)$ стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$ равномерно в $\bar{D}$; 3) k-е производные v_ε ограничены в $\bar{D}$; 4) среди $(k+1)$-х производных v_ε есть хотя бы одна, стремящаяся к ∞ при $\varepsilon\to 0$ в рассматриваемой норме.

Пользуясь введенным определением, мы можем сказать, что второе слагаемое в (5.64) есть функция типа пограничного слоя нулевого порядка.

Разобранный пример весьма типичен. Суть дела здесь заключается в том, что при полном вырождении (за счет $\varepsilon\to 0$) задачи второго порядка (т. е. при ее вырождении в тривиальную задачу $-u=h$) решение u_ε будет иметь вид

$$u_\varepsilon=-h+v+z, \qquad (5.65)$$

где $-h$ — решение «вырожденной» задачи, v — функция типа пограничного слоя и z — величина порядка $O(\varepsilon)$. Можно получить более точную асимптотическую формулу, нежели (5.65). Как это делается, мы покажем в следующем пункте для несколько иного случая.

Отметим, что впервые на описанное явление обратил внимание Риман в 1854 г. (см. Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 1948, стр. 428).

2. Вырождение в уравнение первого порядка. Рассмотрим *эллиптический дифференциальный оператор* L_ε, имеющий вид

$$L_\varepsilon u = \varepsilon L_2 u + L_1 u,$$

где

$$L_1 u = \frac{\partial u}{\partial x} - f(x, y) u,$$

$$f(x, y) \geqslant \alpha^2 > 0, \qquad \alpha = \text{const}, \tag{5.66}$$

$$L_2 u = a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + $$
$$+ b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u, \tag{5.67}$$

$$a_{11}(x, y) > 0.$$

Пусть D — плоская область с границей Γ такой, что всякая прямая $y = c$ при $y_0 < c < y_1$ пересекает Γ точно в двух точках. Прямые $y = y_0$ и $y = y_1$ касаются Γ в точках $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Таким образом, точки A и B разбивают Γ на две дуги, которые мы обозначим через Γ^- и Γ^+ (точки дуги Γ^- имеют меньшие абсциссы, чем соответствующие точки Γ^+).

Задачей A_ε будем называть задачу о построении решения уравнения

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = h(x, y)$$

при условии

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0.$$

Задачей A_0 назовем аналогичную задачу для уравнения

$$L_1 w = h(x, y) \tag{5.68}$$

при условии

$$w|_{\Gamma^+} = 0.$$

Отметим, что прямые $y = \text{const}$ суть характеристики уравнения (5.68). Заметим также, что условие (5.66) обеспечивает существование и единственность решения задачи A_ε для достаточно малых ε. Нас интересует, что происходит с решением u_ε задачи A_ε при $\varepsilon \to 0$. Введем в окрестности Γ^- систему координат (ρ, φ), для чего проведем из точек P дуги Γ^- внутрь D векторы $\overline{PR}$ длины $\eta > 0$ с гладкостью $2m$, образующие острый угол θ с осью Ox $\left(|\theta| < \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$. При достаточно малом η эти векторы между собой не пересекаются. Координата ρ точки S есть длина PS, а φ есть длина части AP дуги Γ^-. Тогда оператор L_ε будет иметь вид

$$L_\varepsilon u = \varepsilon\left[\alpha_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\varphi} + \alpha_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \right.$$
$$\left. + \beta_1\frac{\partial u}{\partial\rho} + \beta_2\frac{\partial u}{\partial\varphi} + cu\right] + \delta_1\frac{\partial u}{\partial\rho} + \delta_2\frac{\partial u}{\partial\varphi} - fu. \quad (5.69)$$

Если коэффициенты L_ε достаточно гладкие, то коэффициенты в (5.69) можно разложить по степеням ρ:

$$\alpha_{ij}(\rho, \varphi) = \sum_{s=0}^{m+1} \alpha_{ijs}(\varphi)\,\rho^s + \alpha_{ij,\,m+2}(\rho, \varphi)\,\rho^{m+2}$$

и т. д. Если сделать еще одну замену переменной $\rho = t\varepsilon$, то мы получим:

$$\varepsilon L_\varepsilon u = M_0 u + \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^i R_i u,$$

где

$$\left.\begin{aligned} M_0 u &= \alpha_{110}(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta_{10}(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}, \\ \alpha_{110}(\varphi) &\geqslant \alpha_0^2 > 0, \quad \delta_{10}(\varphi) \geqslant \delta_0^2 > 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.70)$$

и R_i — некоторые дифференциальные операторы, коэффициенты которых при $i \leqslant m+1$ имеют вид $\mu(\varphi)\,t^j$ $(j \leqslant i)$. Обозначая через w_0 решение задачи A_0, мы сможем определить последовательно функции w_i и v_j $(i = 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, m+1)$ из условий

$$L_1 w_i = -L_2 w_{i-1}, \quad w_i|_{\Gamma^+} = 0,$$
$$M_0 v_0 = 0, \quad (5.71)$$
$$M_0 v_j = -\sum_{s=1}^{j} R_s v_{j-s}, \quad (5.72)$$
$$v_j|_{\Gamma^-} = -w_j|_{\Gamma^-}, \quad v_{m+1}|_{\Gamma^-} = 0.$$

Следует подчеркнуть здесь три обстоятельства. Во-первых, задачу A_0 мы умеем решать при любой правой части. Таким образом, мы сможем фактически построить функции w_i. Во-вторых, оператор M_0 есть обыкновенный линейный дифференциальный оператор с постоянными (относительно t) коэффициентами, так что уравнения (5.71) и (5.72) также легко последовательно решаются. В-третьих, условия (5.70) и отмеченные свойства операторов M_0 и R_i позволяют индукционно показать, что

$$v_j(t, \varphi) = P_j(t, \varphi)\exp(-\lambda_1(\varphi)t),$$

где P_j — многочлены относительно t степени $\leqslant j$ с коэффициентами, зависящими от φ, и $\lambda_1(\varphi) = \frac{\delta_{10}(\varphi)}{\alpha_{110}(\varphi)} > 0$. Следовательно, функции $\varepsilon^j v_j(t, \varphi) = \varepsilon^j v_j\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right)$ суть функции типа пограничного слоя j-го порядка.

Положим теперь

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i w_i + \psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right) \sum_{j=0}^{m+1} \varepsilon^j v_j + z_m, \tag{5.73}$$

где $\psi(\rho)$ — сглаживающая функция, введенная в п. 1. Справедлива следующая

Теорема [6]. *Если коэффициенты оператора* (5.67), *функции f и h и кривая Γ имеют гладкость порядка* $2(m+1)$, *то для z_m в* (5.73) *справедлива оценка*

$$\left\{\iint_{\tilde{D}} z_m^2\, dx\, dy\right\}^{1/2} \leqslant C\varepsilon^{m+1},$$

где $\tilde{D}$ — часть области D, получаемая исключением из D окрестности точек A и B.

Приведенная теорема — далеко не единственный результат исследования асимптотического поведения u_ε при $\varepsilon \to 0$. Рассматривались вопросы о поведении z_m во всей области D, о возможности почленного дифференцирования формулы (5.73), о поведении u_ε при более жестких требованиях на гладкость функций, входящих в задачу A_ε. Ответы на эти вопросы и библиографию по данной теме читатель найдет в [6].

Если часть Γ_1 границы Γ совпадает с характеристикой вырожденного оператора L_1, то разность $u_\varepsilon - w_0$ имеет вблизи Γ_1 характер пограничного слоя. При построении асимптотических формул для u_ε в этом случае вместо обыкновенного дифференциального оператора M_0 в уравнениях типа (5.71) и (5.72) будет фигурировать параболический оператор.

3. Краевые задачи с большими коэффициентами в подобласти. Пусть на плоскости задано эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$L_\varepsilon u = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = h, \qquad (5.74)$$

где коэффициенты, вообще говоря, комплексны и зависят от параметра ε. Пусть, далее, на плоскости имеется замкнутый контур Γ. Обозначим области внутри Γ через D^- и вне Γ через D^+. В D^- коэффициенты L_ε предполагаются разлагающимися по степеням ε (до конечного порядка или в бесконечные ряды) и ограниченными. В D^+ поведение этих коэффициентов определяется формулами:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij0}(x, y) + \varepsilon a_{ij1}(x, y) + \ldots, \\ b_i &= \frac{1}{\varepsilon} b_{i,-1}(x, y) + b_{i0}(x, y) + \ldots, \\ c &= \frac{1}{\varepsilon^2} c_{-2}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} c_{-1}(x, y) + c_0(x, y) + \ldots, \\ h &= 0. \end{aligned}$$

На самом контуре Γ коэффициенты могут иметь разрыв. Поставим задачу нахождения такого решения уравнения (5.74) на всей плоскости, которое удовлетворяло бы на Γ условиям согласования

$$u\Big|_\Gamma^- = u\Big|_\Gamma^+, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma^- = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma^+, \qquad (5.75)$$

где n — нормаль к Γ. Ввиду сказанного о поведении коэффициентов в D^-, в этой области оператор L_ε можно представить в виде

$$L_\varepsilon u = L_0 u + \varepsilon L_1 u + \ldots \qquad (5.76)$$

Введем в окрестности Γ локальные координаты ρ, φ подобно тому, как это сделано в п. 2, только будем считать ρ отсчитываемым по нормали (значения $\rho > 0$ отвечают точкам в D^+) и положим $\rho = \varepsilon t$. Мы получим второе разложение оператора L_ε:

$$L_\varepsilon u = \frac{1}{\varepsilon^2}(M_0 u + \varepsilon R_1 u + \varepsilon^2 R_2 u + \ldots), \tag{5.77}$$

где

$$M_0 u = A(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t} + C(\varphi) u$$

— обыкновенный дифференциальный оператор по t.

Пусть характеристический многочлен

$$P(\lambda, \varphi) = A(\varphi)\lambda^2 + B(\varphi)\lambda + C(\varphi)$$

имеет один корень, $\lambda(\varphi)$, с отрицательной вещественной частью, а другой, $\lambda_1(\varphi)$, — с положительной вещественной частью. Предполагается, далее, что задача (5.74), (5.75) имеет единственное решение, не очень быстро растущее при $\varepsilon \to 0$. Точнее, предполагается, что

$$\|u\|_1 \leqslant \frac{c}{\varepsilon^m}\|L_\varepsilon u\|,$$

где $m \geqslant 0$, а $\|\ \|_1$ и $\|\ \|$ — метрики в некоторых банаховых пространствах.

Пусть, наконец, $\lambda = 0$ не является собственным числом оператора L_0 в D^- при граничном условии $u|_\Gamma = 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} u_\varepsilon(x, y) &= u_\varepsilon^- = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots \qquad (x, y) \in D^-, \\ u_\varepsilon(x, y) &= u_\varepsilon^+ = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots \qquad (x, y) \in D^+. \end{aligned}\right\} \tag{5.78}$$

Здесь функции u_i и v_j находятся последовательно с помощью расщеплений (5.76) и (5.77) оператора L_ε и граничных условий, определяемых равенствами (5.75). Как и в п. 2, следует подчеркнуть, что: 1) для нахождения функций u_i достаточно уметь обращать оператор L_0 (при неоднородных граничных условиях); 2) для нахождения функций v_j — решать линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; 3) функции v_j суть функции типа пограничного слоя. Если разложения (5.78) оборвать на s-м члене, то погрешность будет иметь порядок $O(\varepsilon^{s+1})$. Заметим еще, что второе из разложений (5.78) имеет смысл только вблизи Г. Чтобы разложение имело смысл во всем D^+, надо умножить его на сглаживающую функцию $\psi\left(\frac{\rho}{h}\right)$. В случае, когда $\lambda = 0$ есть точка спектра оператора L_0 при условии $u|_\Gamma = 0$, также можно получить разложения типа (5.78), но здесь они будут начинаться с отрицательных степеней ε. Иначе говоря, в этом случае u_ε при $\varepsilon = 0$ имеет полюс. По поводу этого пункта см. [3, гл. 1].

4. Краевые задачи с бесконечно узкими барьерами. С помощью итерационных процессов, аналогичных описанным выше, можно получить асимптотические формулы для решений краевых задач с бесконечно узкими барьерами.

Именно, пусть область $\tilde{D}$ с границей $\tilde{\Gamma}$ разбита контуром Г на две части: D_1 (внутри Г) и D_2 (между Г и $\tilde{\Gamma}$). Пусть, далее, коэффициенты уравнения

$$L_1u = A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_1\frac{\partial u}{\partial x} + B_2\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = H \qquad (5.79)$$

терпят на Г разрыв.

Введем в окрестности Г локальные координаты (ρ, φ), причем $\rho > 0$ отвечает точкам D_2, и выделим примыкающую к Г полосу $T_\varepsilon (0 < \rho < \varepsilon)$. Зададим в этой полосе уравнение

$$L_2u = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \qquad (5.80)$$

коэффициенты которого допускают разложения вида

$$a_{ij}(\rho, \varphi, \varepsilon) = a_{ij0}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) + \varepsilon a_{ij1}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) + \ldots \ldots + \varepsilon^n a_{ijn}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) + \varepsilon^{n+1} a_{ij,\,n+1}(\rho, \varphi, \varepsilon),$$

$$b_i(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left[b_{i0}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) + \varepsilon b_{i1}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) + \ldots\right],$$

$$c(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[c_0\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) + \varepsilon c_1\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right) + \ldots\right],$$

причем хотя бы одна из производных $\frac{\partial a_{ij0}}{\partial t}$, $\frac{\partial b_{i0}}{\partial t}$, $\frac{\partial c_0}{\partial t}$, где $t=\frac{\rho}{\varepsilon}$, отлична от нуля (функцию, у которой эта производная отлична от нуля, естественно назвать *быстро изменяющейся по* ρ).

Введем оператор L_ε, задаваемый в $\tilde{D}-T_\varepsilon$ левой частью формулы (5.79) и в T_ε — левой частью формулы (5.80). При $\rho=0$ и $\rho=\varepsilon$ этот оператор не определен, так как его коэффициенты могут терпеть здесь разрывы. Положим, далее,

$$h=\begin{cases} H \text{ при } (x, y)\in\tilde{D}-T_\varepsilon, \\ 0 \text{ при } (x, y)\in T_\varepsilon. \end{cases}$$

Задача ставится так: найти решение u_ε уравнения $L_\varepsilon u_\varepsilon=h$ в области $\tilde{D}$, непрерывное вместе с $\frac{\partial u}{\partial\rho}$ при $\rho=0$ и $\rho=\varepsilon$ и удовлетворяющее граничному условию $u_\varepsilon|_{\tilde{\Gamma}}=0$. Оказывается, что и здесь удается провести итерационный процесс с помощью разложения оператора L_ε в полосе T_ε по степеням ε. При этом для последовательного определения функций v_j (в данном случае функции v_j будут быстро изменяющимися по ρ, не имея при этом характера пограничного слоя) приходится решать краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Разумеется, при «попадании на спектр» этой последней краевой задачи возникают дополнительные трудности. Более подробно с материалом данного пункта можно ознакомиться по работе [3].

§ 5. Уравнения высших порядков с малым параметром при старших производных

1. Вырождение эллиптических уравнений в эллиптические. Пусть D — область n-мерного пространства с гладкой границей Γ; $\varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — координаты точек на Γ. Введем в окрестности Γ систему координат (ρ, φ), где $\rho\leqslant h$ — расстояние по нормали к Γ. Величина h столь мала, что отрезки нормали длины h не пересекаются. Через L_i обозначим дифференциальные операторы порядка не выше $2k+i$, определенные для функций, заданных в D. Будем считать, что L_0 и L_{2l} — эллиптические операторы. *Задачей* A_0 назовем задачу

$$L_0 u = h,$$
$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \rho^s}\right|_\Gamma = 0 \qquad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$$

и *задачей* A_ε — задачу

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = h,$$
$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \rho^s}\right|_\Gamma = 0 \qquad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ k+l-1),$$

где $L_\varepsilon = \sum\limits_{i=0}^{2l} \varepsilon^i L_i$, $\frac{\partial^s}{\partial \rho^s}$ — производные по нормали к Г. Разыскивая решение задачи A_ε в виде $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$, в силу определения L_ε имеем:

$$(L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \ldots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots) = h,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &L_0 u_0 = h, \\ &L_0 u_1 = -L_1 u_0, \\ &L_0 u_2 = -L_2 u_0 - L_1 u_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.81}$$

Отметим, что к функциям u_i мы применяем операторы $L_1, \ldots, L_{2l}$ более высокого порядка, чем L_0. Чтобы функции u_i были достаточно гладкими, надо потребовать соответствующей гладкости задачи A_0. Заметим, далее, что, решая уравнения вида $L_0 u_i = g$, мы можем удовлетворить только k граничным условиям, тогда как функция u_ε должна удовлетворять $k+l$ граничным условиям. Здесь, как и ранее, надо ввести в u_ε компоненту типа пограничного слоя, чтобы добиться выполнения оставшихся l граничных условий. Естественно, что для этого соответствующие функции должны обладать l степенями свободы.

Для реализации сказанного нужно получить второе разложение оператора L_ε. Это делается следующим образом. Переходя к координатам ρ, φ, запишем операторы L_i в виде

$$L_i u = a_i(\rho,\ \varphi)\frac{\partial^{2k+i} u}{\partial \rho^{2k+i}} + \sum_{r=1}^{2k+i} M_{ir} u,$$

где M_{ir} содержат производные по ρ порядка $2k+i-r$. Полагая $t=\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\left(\text{тогда } \frac{\partial^s}{\partial\rho^s}=\varepsilon^{-s}\frac{\partial^s}{\partial t^s}\right)$, имеем:

$$L_\varepsilon u=\varepsilon^{-2k}\left[\sum_{i=0}^{2l} a_i(\varepsilon t, \varphi)\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial t^{2k+i}}+\sum_{r=1}^{2(k+l)}\varepsilon^r M_r u\right].$$

Разложив $a_i(\varepsilon t, \varphi)$ по формуле Тейлора с N членами (и также разлагая коэффициенты операторов M_r), найдем:

$$L_\varepsilon u=\varepsilon^{-2k}\left[M_0 u+\sum_{r=1}^{N+1}\varepsilon^r R_r u\right], \tag{5.82}$$

где

$$M_0 u=\sum_{i=0}^{2l} a_i(\varphi)\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial t^{2k+i}}, \qquad a_i(\varphi)=a_i(0, \varphi),$$

и коэффициенты всех операторов R_r (кроме $(N+1)$-го) имеют вид $\mu(\varphi)t^r$.

Компоненту типа пограничного слоя будем искать в форме

$$z=\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\ldots),$$

т. е. мы будем строить решение u_ε таким образом:

$$u_\varepsilon=(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\ldots)+\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\ldots).$$

Вследствие того, что функции u_i находят с помощью первого итерационного процесса, должно быть $L_\varepsilon z=0$, т. е.

$$\varepsilon^{-k}(M_0+\varepsilon R_1+\varepsilon^2 R_2+\ldots)(v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\ldots)=0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим, в частности,

$$M_0 v_0=0. \tag{5.83}$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными (относительно t) коэффициентами. Его характеристическое уравнение есть

$$\lambda^{2k}\sum_{i=0}^{2l} a_i(\varphi)\lambda^i=0. \tag{5.84}$$

Говорят, что задача A_ε *вырождается в задачу* A_0 *регулярно*, если число корней этого уравнения с отрицательной вещественной частью совпадает с числом граничных условий задачи A_ε, выпадающих при ее вырождении в задачу A_0 (т. е. равно l).

Если вырождение регулярно, то общее решение типа пограничного слоя уравнения (5.83) имеет вид

$$v = \sum_{i=1}^{l} c_i(\varphi) e^{-\lambda_i(\varphi) t},$$

где $-\lambda_i(\varphi)$ — упомянутые корни уравнения (5.84) (для простоты будем считать, что все эти корни различны).

Отсюда вытекает, что при условиях

$$\left. \frac{\partial^{k+s} v_0}{\partial t^{k+s}} \right|_{t=0} = r_s(\varphi) \qquad (s = 0, 1, \ldots, l-1)$$

существует единственное решение уравнения (5.83) типа пограничного слоя.

Опишем теперь подробно двойной итерационный процесс нахождения u_ε. Зададим натуральное p и будем искать u_ε в виде

$$u_\varepsilon = U_p + \varepsilon^k V_{p+k} + Z_p,$$

где $U_p = \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^i u_i$, $V_{p+k} = \sum_{i=0}^{p+k} \varepsilon^i v_i$, Z_p — остаточный член. Число N в (5.82) будем считать равным $p+k$. Мы получим:

$$L_\varepsilon U_p = (L_0 + \varepsilon L_1 + \ldots + \varepsilon^{2l} L_{2l})(u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^p u_p) = h,$$

$$L_\varepsilon(\varepsilon^k V_{p+k}) = \varepsilon^{-k}(M_0 + \varepsilon R_1 + \ldots + \varepsilon^{p+k+1} R_{p+k+1}) \times$$
$$\times (v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^{p+k} v_{p+k}) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^s ($s = -k, -k+1, \ldots$ $\ldots, p$), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&L_0 u_0 = h, \\
&L_0 u_i = -\sum_{r=1}^{i} L_r u_{i-r} \qquad (i = 1, \ldots, p), \; L_{2l+s} = 0, \; s > 0, \\
&M_0 v_0 = 0, \\
&M_0 v_i = -\sum_{r=1}^{i} R_r v_{i-r} \qquad (i = 1, \ldots, p+k).
\end{aligned}\right\} \quad (5.85)$$

Найдем граничные условия, которым должны удовлетворять функции u_i и v_i. Равенства

$$\left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial \rho^s}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=0} = \left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial t^s}\right|_{t=0} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, k+l-1)$$

дают после приравнивания коэффициентов при степенях ε^l $(l \leqslant n)$ нулю:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^s u_i}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=0} = -\left.\frac{\partial^s v_{i-k+s}}{\partial t^s}\right|_{t=0} \\ &\qquad (s = 0, 1, \ldots, k-1;\ i = 1, \ldots, p), \\ &\left.\frac{\partial^{k+r} v_i}{\partial t^{k+r}}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial^{k+r} u_{i-r}}{\partial \rho^{k+r}}\right|_{\rho=0} \\ &\qquad (r = 0, 1, \ldots, l-1;\ i = 1, \ldots, p+k), \end{aligned}\right\} \tag{5.86}$$

где положено $u_r \equiv 0$ при $r < 0$ и $r > p$, $v_r \equiv 0$ при $r < 0$.

Уравнения (5.85) с условиями (5.86) позволяют последовательно найти все функции u_i и v_i, причем функции v_i будут иметь вид

$$v_i = \sum_{r=1}^{l} P_{ri}(t, \varphi)\, e^{-\lambda_r(\varphi) t},$$

где $P_{ri}(t, \varphi)$ — многочлены относительно t.

Если предположить, что значение $\lambda = 0$ не принадлежит спектру задачи A_0, и принять следующую гипотезу об ограниченности снизу операторов L_ε при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ (что означает равномерную по ε ограниченность L_ε^{-1}):

$$\| L_\varepsilon u \| \geqslant \alpha^2 \| u \|_1, \qquad \alpha^2 > 0,$$

где $\| \ \|$ и $\| \ \|_1$ — некоторые банаховы нормы, то при достаточной гладкости задач A_0 и A_ε остаточный член Z_p в соответствующим образом подобранной норме будет иметь порядок $O(\varepsilon^{p+1})$.

2. Взаимное вырождение эллиптических и однохарактеристических уравнений. Уравнение нечетного порядка $2k+1$ называется *однохарактеристическим*, если оно может быть записано в форме

$$L_{2k+1} u = M_1 (M_{2k} u) + R_{2k} u = h, \tag{5.87}$$

где M_1 — оператор первого порядка, M_{2k} — эллиптический оператор порядка $2k$ и R_{2k} — любой дифференциальный оператор порядка не выше $2k$. Вещественными характеристиками уравнения (5.87) будут только характеристики оператора M_1. Уравнение (5.87) будем рассматривать в области D n-мерного пространства, ограниченной гладкой поверхностью Γ.

Предположим, что всякая характеристика, проходящая через какую-либо точку D, пересекает границу Γ в двух точках.

Обозначим множество точек «входа» характеристик в $D+\Gamma$ через Γ^-, а множество точек «выхода» — через Γ^+. Множества Γ^- и Γ^+ граничат между собой по некоторому многообразию γ размерности $n-2$ (γ есть геометрическое место точек касания характеристик с Γ). Пусть $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к Γ.

Первой краевой задачей для уравнения (5.87) называется решение этого уравнения при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\Gamma}=0 \qquad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1),$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_{\Gamma^*}=0,$$

где Γ^* есть либо Γ^-, либо Γ^+.

Можно рассмотреть следующие случаи:

а) Однохарактеристическое уравнение порядка $2k+2l+1$ вырождается в однохарактеристическое уравнение порядка $2k+1$. Здесь надо потребовать, чтобы характеристики обоих уравнений совпадали. Точнее, достаточно, чтобы совпадали для этих задач множества Γ^-, Γ^+, γ.

б) Эллиптическое уравнение порядка $2k+2l$ вырождается в однохарактеристическое порядка $2k+1$.

в) Однохарактеристическое уравнение порядка $2k+2l+1$ вырождается в эллиптическое порядка $2k$.

Как и в предыдущем пункте, решение u_ε вырождающегося уравнения можно получить с помощью двойного итерационного процесса. Единственное отличие здесь состоит в том, что при построении u_ε будут фигурировать функции, имеющие характер пограничного слоя только вблизи Γ^- или только вблизи Γ^+.

В статье [6] приведены условия алгебраического характера, выполнение которых обеспечивает регулярность вырождения. Это значит, что функции типа пограничного слоя будут иметь ровно столько степеней свободы, что, распоряжаясь этими степенями свободы, можно компенсировать выпадающие граничные условия.

Следует обратить внимание на то, что в окрестности γ асимптотика портится, т. е. остаточный член оказывается малым только вне некоторой окрестности многообразия γ (см. п. 2 § 4, где разобран частный случай задачи б) при $k=0$, $l=1$).

В заключение отметим, что общих теорем о разрешимости и дифференциальных свойствах решений однохарактеристических уравнений нет. Поэтому, вместо того чтобы предполагать гладкость коэффициентов и границы задач A_0 и A_ε в однохарактеристическом случае, приходится постулировать достаточную гладкость самих решений.

3. Уравнения с быстро осциллирующими граничными условиями. Рассмотрим в двумерной области D с границей Γ уравнение

$$L_\varepsilon u = \sum_{i=0}^{2l} \varepsilon^i L_i u = 0,$$

где L_i — оператор порядка $2k+i$, причем операторы L_0 и L_{2l} эллиптические. Будем считать, что вырождение оператора L_ε в L_0 регулярное. В качестве граничных условий возьмем

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \rho^s}\right|_\Gamma = A_s(\varphi)\, e^{i\omega\varphi} \qquad (s=0,\ 1, \ldots,\ k+l-1).$$

Пусть ε — малый параметр, а ω — большой параметр. Считая, что оператор L_ε обратим равномерно по ε, будем искать асимптотику решения рассматриваемой задачи.

Искомое асимптотическое разложение существенно зависит от соотношения скоростей роста ω и $\frac{1}{\varepsilon}$.

Если $\omega = A\frac{1}{\varepsilon}$, $A=\mathrm{const}$, то решение будет иметь следующее представление:

$$u_\varepsilon = e^{i\omega\varphi} v_\varepsilon = e^{i\omega\varphi}(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots).$$

Функции v_i имеют характер пограничного слоя. Каждая из них имеет $k+l$ степеней свободы, что дает возможность удовлетворить граничным условиям.

Если $\omega = A\varepsilon^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$, то для построения асимптотики решения используются два способа разложения оператора L_ε. Оба связанных с ними итерационных процесса приводят к функциям типа пограничного слоя. При этом разложение v_ε будет содержать целые степени величин ε, ε^α, $\varepsilon^{1-\alpha}$.

Если $\omega = A\varepsilon^{-\beta}$, где $\beta > 1$, то достаточно одного способа разложения оператора L_ε. Решение получается в виде $u = e^{i\omega\varphi}v_\varepsilon$, где

$$v_\varepsilon = \sum_{\nu_i \geqslant 0} \varepsilon^{\nu_1\beta + \nu_2(1-\beta)} v_{\nu_1, \nu_2}.$$

Функции v_{ν_1, ν_2} имеют опять-таки характер пограничного слоя, обладая $k+l$ степенями свободы.

Если эллиптический дифференциальный оператор не зависит от ε, то осцилляция граничных условий за счет большого параметра ω все-таки заставляет решение быстро исчезать при удалении от границы. Точнее, и в этом случае решение имеет характер пограничного слоя.

Кое-что из сказанного в настоящем пункте может быть перенесено на гиперболические и параболические дифференциальные уравнения [8].

4. Асимптотическое представление собственных значений и собственных функций. Пусть в n-мерной области D даны самосопряженные эллиптические операторы L_0 порядка $2k$ и $L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_{\varepsilon 1}$, где $L_{\varepsilon 1} = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon^{2(i-1)} L_{2i}$ порядка $2(k+l)$, причем при k однородных граничных условиях оператор L_0 положительно определен, а при $k+l$ однородных условиях $L_{\varepsilon 1}$ положителен, т. е. $(L_0u, u) > \alpha^2(u, u)$, $\alpha^2 > 0$, $(L_{\varepsilon 1}u, u) \geqslant 0$. В этом случае вырождение L_ε в L_0 регулярное. Пусть собственные значения оператора L_0 простые и перенумерованы в порядке возрастания:

$$\lambda_{10} < \lambda_{20} < \ldots$$

Обозначим через $\lambda_{i\varepsilon}$ собственные значения оператора L_ε. Пусть, наконец, u_{i0} и $u_{i\varepsilon}$ — соответствующие собственные функции операторов L_0 и L_ε. Тогда

$$\lambda_{i\varepsilon}=\lambda_{i0}+\sum_{j=1}^{m+1}\varepsilon^j\mu_{ij}, \quad \mu_{i,\,m+1}=O(1),$$

$$u_{i\varepsilon}=u_{i0}+\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j w_{ij}+\varepsilon^k\sum_{s=0}^{m+k}\varepsilon^s v_{is}+\varepsilon^{m+1}y_{i,\,m+1},$$

где v_{is} — функции типа пограничного слоя,

$$\sum_{|j|=1}^{2k}\|D^j y_{i,\,m+1}\|+\|y_{i,\,m+1}\|=O(1).$$

Здесь

$$|j|=j_1+j_2+\ldots+j_n, \quad D^j=\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}},$$

норма берется в пространстве $L_2(D)$.

Ряд важных результатов по уравнениям, содержащим малый параметр множителем при старших производных, дан в работах [2], [3], [9], [14], [22], [23], [27].

ГЛАВА VI

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Некоторые задачи, приводящие к уравнениям параболического типа с двумя независимыми переменными

1. Задача теплопроводности для тела (стержня), температура которого зависит только от одной из координат x и времени t, а поток тепловой энергии направлен вдоль оси Ox, приводит к уравнению

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_1(x, t). \tag{6.1}$$

Здесь u — температура, являющаяся искомой функцией x и t, k — теплопроводность, c — теплоемкость, ρ — плотность, $f_1(x, t)$ — мощность тепловых источников, распределенных в теле. Если k и c зависят от температуры, то уравнение нелинейно.

2. Важнейший частный случай, когда c, ρ, k постоянны:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{6.2}$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{f_1(x, t)}{c\rho}.$$

При отсутствии тепловых источников получаем однородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6.3}$$

3. Задача теплопроводности тонкого стержня при наличии теплоотдачи через его боковую поверхность в окружающую среду, имеющую температуру, равную нулю, приводит к уравнению

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_1(x, t) - \frac{hp}{\sigma} u, \qquad (6.4)$$

где h — коэффициент внешней теплопроводности, p — периметр сечения, перпендикулярного к оси x, σ — его площадь.

При постоянных c, ρ, k и при отсутствии источников тепла уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu, \qquad (6.5)$$

где

$$b = \frac{hp}{c\rho\sigma}.$$

Уравнение (6.5) сводится к уравнению (6.3) подстановкой

$$u = ve^{-bt}. \qquad (6.6)$$

4. Задача о диффузии приводит к уравнению (6.3), где u — концентрация, $a^2 = \eta$ — коэффициент диффузии, предполагаемый постоянным.

5. Уравнение плоской электромагнитной волны в однородной изотропной проводящей среде можно записать в следующей форме, пренебрегая током смещения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (6.7)$$

6. Задача о движении вязкой жидкости, скорости которой зависят только от x и времени t и направлены вдоль оси, перпендикулярной к оси x, приближенно сводится к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (6.8)$$

в котором u — скорость, а ν — кинематический коэффициент вязкости. (При выводе уравнения пренебрегают градиентом давления.)

§ 2. Общие свойства решений уравнений параболического типа

1. Непрерывные решения уравнения (6.3) представляют собой аналитические функции от x, т. е. в окрестности любой точки $x=x_0$ такие решения могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням разности $x-x_0$. Непрерывные решения уравнения (6.3) бесконечно дифференцируемы относительно переменной t, но, вообще говоря, не аналитичны.

2. Принцип максимума. Рассмотрим в плоскости x, t прямоугольник $0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$.

Назовем линией S ломаную, состоящую из трех сторон прямоугольника $t=0$, $x=x_0$, $x=x_1$. Наибольшие и наименьшие значения всякого непрерывного решения уравнения (6.3) на прямоугольнике достигаются на ломаной S.

3. Существует единственное решение уравнения (6.3), принимающее заданные значения на линии S. (Заданные значения предполагаются непрерывными.)

4. Решение непрерывно зависит от краевых значений, заданных на линии S.

5. Решение, ограниченное на всей плоскости x, t, есть величина постоянная.

Некоторыми свойствами уравнения (6.3) обладает и более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}+C(x, t)u+f(x, t). \qquad (6.9)$$

1) Для уравнения (6.9) справедливы свойства 3, 4, если функции A, B, C, f имеют непрерывные производные.

2) Если A, B, C, f — аналитические функции x, t, то непрерывные решения аналитичны по x.

§ 3. Краевые задачи для конечного отрезка

1. Постановка краевых задач. Постановку краевых задач мы формулируем для случая 1 § 1, когда изучаемое уравнение можно рассматривать как уравнение теплопроводности.

Другие физические задачи приводят по большей части к тем же краевым условиям.

Мы рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x, t) \tag{6.10}$$

при заданном начальном распределении температур

$$u(x, 0)=\varphi(x) \tag{6.11}$$

и при граничных условиях следующих типов:

П е р в а я к р а е в а я з а д а ч а: на границах стержня заданы температуры как функции времени:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x=0 \quad u=\mu_1(t),\\ &\text{при } x=l \quad u=\mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

В т о р а я к р а е в а я з а д а ч а: заданы тепловые потоки, проходящие через торцевые сечения стержня. Так как тепловые потоки пропорциональны частным производным по x, то можно задать:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\nu_1(t),\\ &\text{при } x=l \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\nu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Т р е т ь я к р а е в а я з а д а ч а: на торцах стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей заданную температуру, являющуюся известной функцией от времени:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}=h[u-\theta_1(t)],\\ &\text{при } x=l \quad \frac{\partial u}{\partial x}=-h[u-\theta_2(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

Встречаются и смешанные задачи, когда на разных концах стержня задаются условия различных типов.

Ч е т в е р т а я к р а е в а я з а д а ч а: рассматривается кольцевой стержень длиной l; краевые условия заменяются условиями периодичности:

$$u(0, t)=u(l, t), \qquad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l, t)}{\partial x}.$$

Первые три краевые задачи называются однородными, если μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, θ_1, θ_2 равны нулю.

2. Метод разделения переменных (метод Фурье). Начнем с решения однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{6.15}$$

при однородных краевых условиях.

Положим $u(x,\ t)=\theta(t)y(x)$ и подставим в уравнение (6.15); разделяя переменные, получим:

$$\frac{\dot\theta}{\theta}=\frac{(ky')'}{c\rho y}=-\lambda,$$

откуда

$$\dot\theta+\lambda\theta=0,\quad \theta=Ce^{-\lambda t},$$

$$(ky')'+c\rho\lambda y=0.$$

Краевые условия определяются граничными условиями для функции y, которая должна быть решением краевой задачи Штурма—Лиувилля (см. гл. II).

Обозначая через λ_n собственные значения краевой задачи, а через y_n — собственные функции, получим:

$$u_n(x,\ t)=c_n e^{-\lambda_n t}y_n(x). \tag{6.16}$$

Решением будет ряд

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n t}y_n(x). \tag{6.17}$$

При $t=0$, используя начальные условия, будем иметь:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x),$$

откуда

$$c_n=\int_0^l c\rho\varphi(\xi)\,y_n(\xi)\,d\xi, \tag{6.18}$$

если собственные функции нормированы, и

$$c_n = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^l c\rho\varphi(\xi) y_n(\xi) d\xi, \tag{6.19}$$

где

$$\|y_n\|^2 = \int_0^l c\rho y_n^2(\xi) d\xi,$$

если собственные функции не нормированы. Предполагается, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет обычным требованиям, обеспечивающим разложимость по собственным функциям. (Достаточно, чтобы она была кусочно гладкой и удовлетворяла граничным условиям.)

Подставляя найденные значения c_n в формулу (6.17), придадим ей вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \frac{y_n(x)}{\|y_n\|^2} \int_0^l c\rho\varphi(\xi) y_n(\xi) d\xi = \\ = \int_0^l \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi, \tag{6.20}$$

где

$$G(x, \xi, t) = c\rho \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \frac{y_n(\xi) y_n(x)}{\|y_n\|^2}. \tag{6.21}$$

Функция $G(x, \xi, t)$ называется *функцией мгновенного источника* (или *функцией Грина*). Чтобы выяснить ее физический смысл, рассмотрим начальное распределение температур в виде δ-функции (функции Дирака), отличающейся от нуля в одной точке $x = \xi$, в которой она равна бесконечности, причем интеграл от этой функции равен единице. Тогда

$$\int_0^l \delta(\xi) G(x, \xi, t) d\xi = G(x, \xi, t).$$

Следовательно, $G(x, \xi, t)$ — температура, созданная в точке x в момент t тепловым источником единичной интенсивности, сосредоточенным в точке ξ в момент $t = 0$. Функция $G(x, \xi, t)$ симметрична относительно переменных x и ξ.

Перейдем к решению неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x, t)$$

с начальным условием $u=0$ при $t=0$ и однородными граничными условиями.

Решение будем искать в виде ряда по собственным функциям

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)y_n(x), \tag{6.22}$$

где $u_n(t)$ подлежат определению. Функцию $f(x, t)$ также представим рядом

$$f(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)y_n(x), \tag{6.23}$$

где f_n — коэффициенты разложения, определяемые по формулам

$$f_n(t)=\frac{1}{\|y_n\|^2}\int_0^l f_1(\xi, t)y_n(\xi)\,d\xi,$$

где $f_1(x, t)=c\rho f(x, t)$.

Подставляя в уравнение, будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)\{\dot{u}_n(t)+\lambda_n u_n(t)-f_n(t)\}=0,$$

откуда с учетом того, что $u_n(t)=0$ при $t=0$, получим:

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau$$

и, следовательно,

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}d\tau\int_0^l f_1(\xi, \tau)y_n(\xi)d\xi\frac{1}{\|y_n\|^2}\right\}y_n(x). \tag{6.24}$$

Решение можно представить также в следующей форме:

$$u(x, t)=\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f_1(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{6.25}$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi). \tag{6.26}$$

Физический смысл решения таков: его можно рассматривать как результат суммирования действия мгновенных источников, распределенных по длине стержня (интегрирование по ξ) и распределенных по времени (интегрирование по τ).

Решение неоднородного уравнения при любых начальных условиях получается суммированием:

$$u(x, t)=\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f_1(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau+ \\ +\int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{6.27}$$

Неоднородные граничные условия сводятся к однородным заменой

$$u=v+z(x, t),$$

где $z(x, t)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям. Для v получаем уравнение с измененной правой частью. Если уравнение для определения u записать в виде $L[u]=f(x, t)$, то уравнение для v будет иметь вид $L[v]=f(x, t)-L[z]$; граничные условия для функции v будут однородными, а начальное условие при $t=0$ будет следующим: $v(x, 0)= =\varphi(x)-z(x, 0)$.

Таким образом, получив решение однородной краевой задачи для однородного уравнения и составив выражение для функции источника, можно получить решения неоднородных задач в квадратурах.

3. Интеграл Дюгамеля. Пусть $U(x, t)$ есть решение неоднородной краевой задачи при условиях $U(0, t)=1$,

$U(l,\ t)=0$ и при однородных начальных условиях; тогда функция

$$u(x,\ t)=\int_0^t U_t(x,\ t-\tau)\,\mu_1(\tau)\,d\tau \tag{6.28}$$

будет решением следующей краевой задачи:

$$u(0,\ t)=\mu_1(t),$$
$$u(l,\ t)=0$$

при однородных граничных условиях. Формула (6.28) называется *интегральной формулой Дюгамеля*.

Аналогично краевая задача

$$u(0,\ t)=0,$$
$$u(l,\ t)=\mu_2(t)$$

сводится к краевой задаче

$$U(0,\ t)=0,$$
$$U(l,\ t)=1.$$

4. Частный случай постоянных ρ, c, k. В силу сказанного выше рассматриваем только однородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

полагая $u(x,\ t)=\theta(t)\,y(x)$, получим:

$$\frac{\dot\theta}{a^2\theta}=\frac{y''}{y}=-\lambda,$$

откуда

$$\dot\theta+a^2\lambda\theta=0,\quad \theta=Ce^{-\lambda a^2 t},$$

$$y''+\lambda y=0,\quad y=A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Первая краевая задача. Собственные значения: $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

Собственные функции (ненормированные):

$$y_n = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \|y_n\| = \int_0^l y_n^2\,dx = \frac{l}{2},$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi.$$

Неоднородные граничные условия можно привести к однородным заменой

$$u = v + \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Вторая краевая задача. В этом случае $\lambda_0 = 0$ также является собственным значением, а $y_0 = 1$ — соответствующей собственной функцией; собственные значения для $n \geqslant 1$: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

Собственные функции: $y_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x$,

$$\|y_n\|^2 = \frac{l}{2},$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}\xi\right\}.$$

Неоднородные граничные условия сводятся к однородным заменой

$$u = v + \nu_1(t) + [\nu_2(t) - \nu_1(t)]\frac{x^2}{2l}.$$

Третья краевая задача. Собственные значения определяются через корни z_n уравнения

$$2\operatorname{ctg} z = \frac{z}{p} - \frac{p}{z},$$

где $p = hl$, $\lambda_n = \frac{z_n}{l}$.

Собственные функции:

$$y_n = \cos\sqrt{\lambda_n}\,x + \frac{p}{\lambda_n l}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x,$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{l}{2}\,\frac{p(p+2) + z_n^2}{z_n^2}.$$

Сведение неоднородных граничных условий к однородным может быть достигнуто заменой

$$u = v + \theta_1 + \frac{p}{p+2}(\theta_2 - \theta_1)\left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Четвертая краевая задача. Имеется собственное значение $\lambda_0 = 0$; соответствующая собственная функция: $y_0 = 1$. Собственные значения $(n > 0)$: $\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{l^2}$, где n — целое число; каждому собственному значению, кроме нулевого, соответствуют две собственных функции:

$$y_n = \begin{cases} \cos\frac{2n\pi}{l}x, \\ \sin\frac{2n\pi}{l}x, \end{cases}$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{4a^2n^2\pi^2}{l^2}t} \cos\frac{2n\pi}{l}(x - \xi)\right\}.$$

5. Функция Грина и функция Якоби. В теории эллиптических функций встречается функция

$$\vartheta(x, t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2n^2t}\cos(2\pi nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-n)^2}{4t}},$$

называемая *функцией Якоби*. Первый ряд быстро сходится при больших t, второй — при малых t.

Через эту функцию легко выражаются функции Грина некоторых из рассмотренных краевых задач.

Первая краевая задача:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2l}\left[\vartheta\left(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{a^2t}{l^2}\right) - \vartheta\left(\frac{x+\xi}{2l}, \frac{a^2t}{l}\right)\right].$$

Решение первой краевой задачи при неоднородных граничных условиях также выражается через функцию Якоби. При однородных начальных условиях

$$u = -\frac{1}{l}\int_0^{a^2t} \mu_1(\tau)\frac{\partial}{\partial x}\vartheta\left(\frac{x}{2l}, \frac{a^2(t-\tau)}{l^2}\right)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{l}\int_0^{a^2t} \mu_2(\tau)\frac{\partial}{\partial x}\vartheta\left(\frac{l-x}{2l}, \frac{a^2(t-\tau)}{l^2}\right)d\tau.$$

Вторая краевая задача:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2l}\left[\vartheta\left(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{a^2t}{l}\right) + \vartheta\left(\frac{x+\xi}{2l}, \frac{a^2t}{l}\right)\right].$$

Третья краевая задача:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{l}\vartheta\left(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{a^2t}{l^2}\right).$$

Смешанные краевые задачи:

a)

$$u(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0,$$

$$G(x, \xi, t) = \vartheta\left(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right) + \\ + \vartheta\left(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right);$$

b)

$$u(l, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0,$$

$$G(x, \xi, t) = \vartheta\left(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right) + \vartheta\left(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right) - \\ - \vartheta\left(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\right).$$

6. Некоторые смешанные краевые задачи.

a) Граничные условия:

$$u(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_n = \left[(2n+1)\frac{\pi}{2l}\right]^2$.

Собственные функции:

$$y_n = \sin\sqrt{\lambda_n}\,x, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2},$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} y_n(x) y_n(\xi).$$

б) Граничные условия:

$$u(0,\ t)=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right|_{x=l}=0.$$

Собственные значения λ_n определяются через корни уравнения $\operatorname{tg} z=-\frac{z}{p}$, где $p=hl$.

Собственные функции:

$$y_n=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x,\quad \|y_n\|^2=\frac{l}{2}\,\frac{p(p+1)+\lambda_n l^2}{p^2+\lambda_n l^2}.$$

§ 4. Решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой

1. Общие соображения. Требуется решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях $u(x,\ 0)=\varphi(x)$, заданных на бесконечной прямой, и при дополнительном условии ограниченности решения при всех значениях x и при всех $t>0$.

Решение этой задачи дается формулой

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{6.29}$$

где

$$G(x,\ \xi,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{6.30}$$

Для того чтобы функция $u(x,\ t)$, определяемая формулой (6.29), была решением уравнения теплопроводности и удовлетворяла начальному условию, достаточно, чтобы функция $\varphi(x)$ была непрерывной и чтобы существовал интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|\,dx.$$

При этих условиях интеграл (6.29) равномерно сходится при $t \geqslant 0$; интегралы, полученные из (6.29) дифференцированием под знаком интеграла любое число раз по x и по t, сходятся равномерно при $t \geqslant \delta$, где δ — любое положительное число. Отсюда вытекает, как известно, что интеграл (6.29) можно дифференцировать под знаком интеграла по x и по t любое число раз.

Только что сформулированные условия можно ослабить. Так, достаточно, чтобы начальная функция $\varphi(x)$ была непрерывна и чтобы на бесконечности она возрастала не быстрее, чем e^{ax^α}, где a и α — положительные постоянные, причем $\alpha < 2$. При таком условии интеграл (6.29), а также интегралы, полученные из него дифференцированием любого порядка по x и t под знаком интеграла, равномерно сходятся в области $t \geqslant \delta$, где δ — любое положительное число.

Физический смысл источника тот же, что и в § 3: функция $G(x, \xi, t)$ есть температура в точке x и в момент времени t, созданная источником, сосредоточенным в точке ξ в момент времени $t=0$.

Во всякой точке x температура, создаваемая мгновенным точечным источником в момент $t=0$, отлична от нуля при сколь угодно малом положительном t, т. е. тепло от источника распространяется с бесконечно большой скоростью. Этот парадоксальный результат объясняется тем, что при выводе уравнений теплопроводности не учитывалась инерция движения молекул, передающих тепло. Теория остается практически пригодной благодаря тому, что при малых значениях t тепловая энергия, поступающая в точки, удаленные от источника, весьма мала.

Существенно, что распределение температур от мгновенного источника тождественно с гауссовым распределением ошибок в теории вероятностей.

2. Случай разрывного распределения начальных температур. Пусть начальное распределение температур определяется функцией

$$\varphi(x)=\begin{cases} T_1 & \text{для} \quad x>0, \\ T_2 & \text{для} \quad x<0, \\ \dfrac{T_1+T_2}{2} & \text{для} \quad x=0. \end{cases}$$

Тогда решение приводится к виду

$$u(x,\ t)=\frac{T_1+T_2}{2}+(T_1-T_2)\,\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

где символом $\Phi(z)$ обозначен *интеграл ошибок*

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

3. Функция $G(x,\ \xi,\ t-\tau)$ и решение неоднородного уравнения теплопроводности. Введем функцию

$$G(x,\ \xi,\ t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, & t>\tau,\\ 0, & t\leqslant\tau.\end{cases} \qquad (6.31)$$

Эта функция представляет температуру, созданную мгновенным источником, действовавшим в момент τ. С помощью функции $G(x,\ \xi,\ t-\tau)$ легко может быть записано решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t).$$

В силу того, что функция $f(x,\ t)$ задает распределение мгновенных источников по оси x и по времени t, можно суммированием их действия получить решение неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях в следующей форме:

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Решение неоднородной задачи при начальных условиях $u(x,\ 0)=\varphi(x)$ дается формулой

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (6.32)$$

Функция $G(x,\ \xi,\ t-\tau)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по x и t при $t>\tau$:

$$L[G]=a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-\frac{\partial G}{\partial t}=0.$$

По переменным ξ, τ функция G удовлетворяет присоединенному уравнению

$$M[G]=a^2\frac{\partial G}{\partial \xi^2}+\frac{\partial G}{\partial \tau}=0.$$

Функция $G(x, \xi, \tau)$ симметрична относительно аргументов x и ξ.

4. Краевые задачи для полубесконечной прямой. Ищется ограниченное решение уравнения (6.3) на полубесконечной прямой $x>0$ при обычном начальном условии и при различных краевых условиях в точке $x=0$.

1) $u(0, t)=0$.

Решение получается из решения, полученного для бесконечной прямой нечетным продолжением функции $\varphi(x)$, заданной при $x>0$, на полупрямую $x<0$, что приводит к формуле

$$u(x, t)=\int_0^\infty G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{6.33}$$

где на этот раз

$$G(x, \xi, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}. \tag{6.34}$$

2) $\dfrac{\partial u(0, t)}{\partial x}=0$.

В этом случае начальные условия, заданные при $x>0$, должны быть продолжены четно, так как производная от четной функции нечетна; решение опять имеет вид (6.33) с функцией источника

$$G(x, \xi, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}.$$

3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}-hu\right|_{x=0}=0$.

В этом случае решение имеет вид (6.33) с

$$G(x, \xi, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}-$$

$$-\frac{2he^{h\xi}}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{-\xi} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}e^{hs}\,ds. \tag{6.35}$$

§ 5. Задачи без начальных условий

При рассмотрении длительных температурных процессов влияние начального распределения температур сглаживается и поэтому имеет смысл искать решение, удовлетворяющее только краевым условиям. Удобно начальный момент отнести в $t=-\infty$. Справедлива общая теорема о существовании единственного решения всех перечисленных выше краевых задач, остающегося ограниченным для всех $t>-\infty$.

Исторически первой была задача о температурных колебаниях почвы, решенная Фурье.

При естественных предположениях, идеализирующих изучаемый процесс, задача сводится к следующей. Будем искать решение уравнения (6.3) на полупрямой $x>0$, ограниченное для всех x и t при граничном условии $u(0, t)=A\cos\omega t$. Будем искать решение, периодическое по времени и затухающее при увеличении x:

$$u=e^{-\gamma x}\alpha\cos[\omega t-\beta(x)], \tag{6.36}$$

где α, β и γ подлежат определению. Подставляя в уравнения и проводя простые вычисления, найдем, что

$$u(x, t)=Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right). \tag{6.37}$$

Затухание колебаний растет с ростом частоты ω. Колебания происходят со сдвигом фазы, пропорциональным x. Можно обобщить полученное решение, заменив граничное условие более общим: $u(0, t)=\mu(t)$, где $\mu(t)$ — периодическая функция. Разлагая ее в ряд Фурье и находя решение для каждой гармоники в отдельности по формуле (6.37), можно затем построить ряд

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\sqrt{\frac{\omega_n}{2a^2}}x}\cos\left(\omega_n t-\sqrt{\frac{\omega_n}{2a^2}}x\right).$$

Существенно, что, чем больше x, тем с большей точностью можно из всего ряда сохранять только первую гармонику.

§ 6. Понятие о параболической системе

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{2pk_0+|k|\leq 2pn_j \\ k_0<n_j,\ |k|\leq M}} a_{ij}^{(k_0,\ k)}(t,\ x) \frac{\partial^{k_0+|k|} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t,\ x) \tag{6.38}$$

$$(k=(k_1, \ldots, k_n), \quad |k|=k_1+\ldots+k_n, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

с вещественными коэффициентами называется *параболической в смысле И. Г. Петровского* в некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства E_{n+1} точек $(t,\ x)=(t,\ x_1, \ldots, x_n)$, если в ней для любого вещественного вектора $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такого, что $|\alpha|=\sqrt{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2}=1$, корни $\lambda=\lambda(t,\ x,\ \alpha)$ алгебраического уравнения

$$\det\left\{\left\|\sum_{2pk_0+|k|=2pn_j} a_{ij}^{(k_0,\ k)}(t,\ x)\,\lambda^{k_0}(i\alpha_1)^{k_1}\ldots(i\alpha_n)^{k_n}\right\|_{i,\ j=1}^{N} - \left\|\begin{matrix} \lambda^{n_1} & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^{n_2} \ldots & 0 \\ . & . \;\; . & . \\ 0 & 0 \ldots & \lambda^{n_N} \end{matrix}\right\|\right\}=0 \tag{6.39}$$

удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\delta$ с некоторой положительной постоянной δ.

При $n_i=1$ систему (6.38) можно записать в следующей матричной форме:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{m=1}^{2p} \sum_{i_1, \ldots, i_m=1}^{n} A^{(i_1, \ldots, i_m)}(t,\ x) \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} - A(t,\ x)\,u=f(t,\ x), \tag{6.40}$$

где $A^{(i_1, \ldots, i_m)}(t,\ x)$ и $A(t,\ x)$ — квадратные матрицы порядка N, а $u=u(t,\ x)=(u_1, \ldots, u_N)$ и $f(t,\ x)=(f_1, \ldots, f_N)$ — вектор-функции (одноколонные матрицы). При этом уравнение (6.39) приобретает следующий вид:

$$\det\left\{(-1)^p \sum_{i_1, \ldots, i_{2p}=1}^{n} A^{(i_1, \ldots, i_{2p})}(t, x)\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_{2p}} - \lambda E\right\} = 0, \tag{6.41}$$

где E — единичная матрица порядка N.

Параболические системы являются обобщением одного параболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)u + f(t, x) \tag{6.42}$$

с положительно определенной квадратичной формой $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j$ и тем более одного параболического уравнения с двумя независимыми переменными, рассмотренного в предыдущих параграфах.

Несмотря на широту этого обобщения, теория параболических систем в смысле постановки задач и свойств решений во многом сходна с теорией параболического уравнения с двумя независимыми переменными.

В дальнейшем будет рассматриваться наиболее изученная параболическая система (6.40) с производной по t первого порядка.

§ 7. Фундаментальная матрица параболической системы

Предположим, что система (6.40) параболична в слое $[0, T]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ пространства E_{n+1}.

Матрица $U(t, x; \tau, y)$ называется *фундаментальной* для системы (6.40), если при $(t, x) \neq (\tau, y)$ она является регулярным решением однородной системы

$$Lu = 0 \tag{6.43}$$

(т. е. решением, имеющим непрерывные производные, входящие в систему) и если для любой вектор-функции $\varphi(x)$, непрерывной в некоторой области D пространства E_n точек x, справедливо соотношение

$$\lim_{t-\tau\to+0}\int_D U(t,\ x;\ \tau,\ y)\varphi(y)\,dy=\begin{cases}\varphi(x) & \text{при } x\in D\\ 0 & \text{при } x\notin \overline{D}\end{cases}$$

$$(dy=dy_1\ldots dy_n).$$

Существование фундаментальной матрицы обеспечено, если выполнены следующие условия:

1) коэффициенты системы ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера по x;

2) старшие коэффициенты системы равномерно непрерывны по переменной t (если дифференциальный оператор

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{2p}=1}^{n} A^{(i_1,\ldots,i_{2p})}(t,\ x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{2p}}}$$

сильно эллиптичен, то это условие излишне).

Построение фундаментальной матрицы производится следующим образом. Обозначим через $W(t,\ \tau,\ y,\ \alpha)$ матричное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dW}{dt}=(-1)^p\sum_{i_1,\ldots,i_{2p}=1}^{n} A^{(i_1,\ldots,i_{2p})}(t,\ y)\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_{2p}}w,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$W(\tau,\ \tau,\ y,\ \alpha)=E.$$

Положим

$$U_0(t,\ x;\ \tau,\ y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E_n} W(t,\ \tau,\ y,\ \alpha)\exp\{i(\alpha,\ x-y)\}\,d\alpha$$

$$((\alpha,\ x)=\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n,\quad x-y=(x_1-y_1,\ldots,\ x_n-y_n)).$$

Можно подобрать матрицу $R(t,\ x;\ \tau,\ y)$ так, чтобы матрица

$$U(t,\ x;\ \tau,\ y)=\begin{cases}0 \quad \text{при } t\leqslant\tau,\\ U_0(t,\ x;\ \tau,\ y)+\\ \quad+\int_\tau^t ds\int_{E_n} U_0(t,\ x;\ s,\ z)R(s,\ z;\ \tau,\ y)\,dz \quad \text{при } t>\tau\end{cases}$$

была фундаментальной для системы (6.40). При этом будут справедливы следующие оценки:

$$|D_x^l U(t, x; \tau, y)| \leqslant \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+l}{2p}}} \exp\left\{-\eta\left(\frac{|x-y|}{2p\sqrt{t-\tau}}\right)^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}$$
$$(t > \tau, \quad 0 \leqslant l \leqslant 2p), \tag{6.44}$$

где C и η — положительные постоянные, D_x^l — знак производной порядка l по произвольной комбинации независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $|x-y|$ — евклидово расстояние между точками x и y.

Рассмотрим в слое $[0, T]$ систему

$$L^* v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} - \\ - \sum_{m=1}^{2p} (-1)^m \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} (A^{(i_1, \ldots, i_m)*}(t, x) v) - \\ - A^*(t, x) v = 0, \tag{6.45}$$

где $A^{(i_1, \ldots, i_m)*}(t, x)$ и $A^*(t, x)$ — матрицы, сопряженные с матрицами $A^{(i_1, \ldots, i_m)}(t, x)$ и $A(t, x)$ соответственно. Система (6.45) называется сопряженной с системой (6.43).

Фундаментальная матрица $U(t, x; \tau, y)$ параболической системы (6.40) (или системы (6.43)) называется *нормальной*, если матрица $U^*(\tau, y; t, x)$ является фундаментальной для системы (6.45).

Предположим теперь (и в дальнейшем), что коэффициенты систем (6.43) и (6.45) удовлетворяют условиям 1) и 2). Тогда справедливы следующие предположения:

1. Матрица $U(t, x; \tau, y)$, построенная выше, является нормальной.

2. Существует одна и только одна нормальная фундаментальная матрица параболической системы, для которой справедливы оценки (6.44).

3. При $0 \leqslant \tau < s < t \leqslant T$ имеет место равенство

$$U(t, x; \tau, y) = \int_{E_n} U(t, x; s, z)\, U(s, z; \tau, y)\, dz.$$

4. При $(t, x) \neq (\tau, y)$ существуют и непрерывны смешанные производные вида $D_x^l D_y^m U(t, x; \tau, y)$ $(0 \leqslant l \leqslant 2p,$

$0 \leqslant m \leqslant 2p$), причем для $t > \tau$

$$|D_x^l D_y^m U(t, x; \tau, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(t-\tau)^{\frac{n+l+m}{2p}}} \exp\left\{-\eta\left(\frac{|x-y|}{\sqrt[2p]{t-\tau}}\right)^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}.$$

5. Равенство

$$\int_{E_n} U(t, x; \tau, y)\, dy = E \qquad (t \geqslant \tau)$$

справедливо тогда и только тогда, когда $A(t, x) \equiv 0$.

§ 8. Задача Коши и смешанная задача для параболической системы

Будем искать в слое $(0, T]$ $(0 < t \leqslant T)$ регулярное решение задачи Коши для параболической системы (6.40) при начальном условии

$$\lim_{t \to +0} u(t, x) = \varphi(x). \tag{6.46}$$

При условиях, что вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывна в E_n, вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера по x в каждой конечной части слоя $[0, T]$ и что, кроме того,

$$|\varphi(x)| \leqslant C \exp\left\{\mu |x|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\},$$

$$\int_0^T |f(t, x)|\, dt \leqslant C \exp\left\{\mu |x|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\}$$

с некоторыми положительными C и μ $(\mu < \eta T^{\frac{1}{1-2p}})$, решение поставленной задачи дается следующей обобщенной формулой Пуассона:

$$u(t, x) = \int_{E_n} U(t, x; 0, y)\, \varphi(y)\, dy +$$

$$+ \int_0^t ds \int_{E_n} U(t, x; s, z) f(s, z)\, dz.$$

Это решение единственно в классе регулярных вектор-функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T dt \int_{E_n} |u(t, x)| \exp\left\{-\sigma |x|^{\frac{2p}{2p-1}}\right\} dx < +\infty$$

с некоторым $\sigma \geqslant 0$.

Пусть D — конечная выпуклая область пространства E_n точек x с достаточно гладкой границей S. Обозначим через $Q = [0, T] \times D$ цилиндрическую область пространства E_{n+1} с основанием D.

Для области Q будем решать смешанную задачу, состоящую в нахождении вектор-функции $u = u(t, x)$, удовлетворяющей внутри Q однородной параболической системе (6.43), на D — начальному условию

$$\lim_{t \to +0} u(t, x) = 0 \tag{6.47}$$

и на поверхности $\Gamma = [0, T] \times S$ — краевым условиям вида

$$R_\mu u \equiv \sum_{m=0}^{2p-1} \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} B_\mu^{(i_1, \ldots, i_m)}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} = \psi_\mu(t, x) \tag{6.48}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, p),$$

где $B_\mu^{(i_1, \ldots, i_m)}(x)$ — достаточно гладкие вещественные квадратные матрицы порядка N, заданные на S, и $\psi_\mu(t, x)$ — непрерывные вектор-функции, заданные на Γ.

К такой задаче сводится более общая смешанная задача для неоднородной системы (6.40) с неоднородным начальным условием (6.46) и краевыми условиями (6.48) с помощью замены неизвестной вектор-функции по формуле

$$v(t, x) = u(t, x) - \int_D U(t, x; 0, y) \varphi(y) dy - \int_0^t ds \int_D U(t, x; s, z) f(s, z) dz.$$

Необходимым условием регулярной разрешимости поставленной смешанной задачи является выполнение условия ее регулярности, описание которого дается ниже.

Обозначим через $L_0\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $R_\mu^{(0)}\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ главные части дифференциальных операторов L и R_μ. Для фиксированной точки $(s,\ y) \in \Gamma$ заменим в L_0 и R_μ производную $\frac{\partial}{\partial t}$ на q и дифференциальный вектор $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ на $i(\tau + \nu z)$, где τ — вектор, касательный к S в точке y, и ν — единичный вектор нормали к S в точке y. Составим прямоугольную матрицу с pN строками и с $2pN$ столбцами

$$D = \left\| \int_{C^+} R_\mu^{(0)}(y,\ i\tau + iz\nu) \times \right.$$
$$\left. \times L_0^{-1}(s,\ y,\ q,\ i\tau + iz\nu)\, z^{\lambda - 1}\, dz \right\|_{\substack{\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p \\ \lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p}},$$

где C^+ — положительно ориентированный контур, лежащий в верхней полуплоскости комплексной плоскости z и охватывающий все лежащие там корни уравнения

$$\det L_0(s,\ y,\ q,\ i\tau + iz\nu) = 0.$$

Смешанная задача называется *регулярной*, если для любой точки $(s,\ y) \in \Gamma$, любого вектора τ с длиной $|\tau| = 1$ и для любого комплексного q, удовлетворяющего неравенству $\operatorname{Re} q > -\delta_1$ $(0 < \delta_1 < \delta,\ \delta$ — число, определяемое условием параболичности системы (6.43)), ранг матрицы D равен pN.

Поясним смысл условия регулярности. В полуслое, ограниченном плоскостью, касательной к Γ в точке (s, y), плоскостями $t = 0$ и $t = T$ и содержащем область Q, будем решать смешанную задачу для системы

$$L_0\left(s,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

при начальном условии (6.47) и краевых условиях

$$R_\mu^{(0)}\left(y,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \psi_\mu(t,\ x) \qquad (\mu = 1, \ldots, p).$$

Условие регулярности смешанной задачи для цилиндра Q является следствием требования регулярной разрешимости всех таких смешанных задач для произвольной точки $(s, y) \in \Gamma$.

При выполнении условия согласования начального и краевых условий

$$R_\mu 0\,|_S = \psi_\mu(0,\ x)\,|_S \qquad (\mu = 1,\ 2, \ldots, p)$$

регулярная смешанная задача однозначно разрешима. Решение представляется в форме

$$u(t, x) = \sum_{\mu=1}^{p} \int_0^t ds \int_S G_\mu(t, x; s, y)\, \rho_\mu(s, y)\, dS_y,$$

где $G_\mu(t, x; s, y)$ — регулярные при $(t, x) \neq (s, y)$ матричные решения системы (6.43), удовлетворяющие для каждой точки $z \in S$ краевым условиям

$$\lim R_l \int_0^t ds \int_S G_\mu(t, x; s, y)\, dS_y = \\ = \delta_{l\mu} E + \int_0^t ds \int_S R_l\, G_\mu(t, z; s, y)\, dS_y, \qquad (6.49)$$

$\delta_{l\mu}$ — символ Кронекера и $\rho_\mu(s, y)$ — непрерывные вектор-функции. Из (6.48) и (6.49) следует, что вектор-функции $\rho_\mu(t, x)$ должны удовлетворять системе интегральных уравнений

$$\rho_l(t, x) + \sum_{\mu=1}^{p} \int_0^t ds \int_S R_l G_\mu(t, x; s, y)\, \rho_\mu(s, y)\, dS_y = \\ = \psi_l(t, x) \quad (l = 1, 2, \ldots, p). \qquad (6.50)$$

Ядра системы (6.50) таковы, что к ним применима теория Вольтерра, и в смысле разрешимости эта система ведет себя, как система интегральных уравнений типа Вольтерра: к ней применим метод последовательных приближений.

§ 9. Теория потенциала для одного параболического уравнения второго порядка

Для параболического уравнения второго порядка можно построить теорию потенциала, во многом аналогичную теории потенциала для уравнения Лапласа (см. гл. III, § 8).

Рассмотрим в слое $[0, T]$ однородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)\, u. \qquad (6.51)$$

Будем считать, что коэффициенты этого уравнения ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера по x, а старшие коэффициенты, кроме того, удовлетворяют условию Гёльдера также по t и непрерывно дифференцируемы по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть D — конечная или бесконечная (не обязательно выпуклая) область пространства E_n, ограниченная поверхностью типа Ляпунова S.

Положим для $(s, y) \in \Gamma = [0, T] \times S$

$$Pu = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ij}(s, y) u) - b_i(s, y) u \right\} \cos(\nu, y_i).$$

Исходным пунктом в теории потенциала для параболических уравнений является следующая формула:

$$\int_0^t ds \int_S PU(t, x; s, y)\, dS_y = \mu - \int_D U(t, x; s, y)\, dy - \int_0^t ds \int_D U(t, x; s, y)\, c(s, y)\, dy, \tag{6.52}$$

где

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in D, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x \in S, \\ 0 & \text{при } x \notin D + S. \end{cases}$$

Формула (6.52) вполне аналогична известной формуле Гаусса из теории потенциала для уравнения Лапласа.

Далее, имеем при $t > s$

$$PU(t, x; s, y) = \frac{1}{2} \tilde{U}(t, x; s, y) \frac{|x - y|}{t - s} \cos(\nu, x - y) + H(t, x; s, y), \tag{6.53}$$

причем для функций $\tilde{U}(t, x; s, y)$ и $H(t, x; s, y)$ справедливы оценки

$$\left.\begin{aligned} |\tilde{U}(t, x; s, y)| &\leq \frac{c}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\eta \frac{|x-y|^2}{t-s}\right\}, \\ |H(t, x; s, y)| &\leq \frac{c}{(t-s)^{\frac{n+1}{2} - \beta}} \exp\left\{-\eta \frac{|x-y|^2}{t-s}\right\} \\ &\qquad (\beta > 0). \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

Пусть функция $\rho(s, y)$ определена и непрерывна на Γ. Положим

$$v(t, x)=\int_0^t ds \int_S U(t, x; s, y)\,\rho(s, y)\,dS_y,$$

$$w(t, x)=\int_0^t ds \int_S PU(t, x; s, y)\,\rho(s, y)\,dS_y.$$

Функции $v(t, x)$ и $w(t, x)$ называются соответственно *параболическими потенциалами простого и двойного слоя* с плотностью $\rho(s, y)$.

Из формулы (6.52) вытекает, что для любой точки $z \in S$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to z} \tilde{P}_x v(t, x)=\mp\frac{1}{2}\rho(t, z)+\tilde{P}_z v(t, z),\\ &\lim_{x\to z} w(t, x)=\pm\frac{1}{2}\rho(t, z)+w(t, z)\\ &\left(\tilde{P}_x u=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(t, x)\,u)-b_i(t, x)\,u\right\}\times\right.\\ &\qquad\qquad\left.\times\cos(\nu_z, x_i)\right), \end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

причем верхний знак относится к случаю, когда $x\to z$ изнутри D, а нижний знак — к случаю, когда $x\to z$ со стороны внешности D.

Формулы (6.55) позволяют сводить к интегральным уравнениям типа (6.50) решение смешанных задач для уравнения (6.51) с нулевым начальным условием и краевыми условиями вида

$$Pu+au|_\Gamma=\psi(t, x) \tag{6.56}$$

или

$$u|_\Gamma=\psi(t, x). \tag{6.57}$$

При этом в случае краевого условия (6.56) решение нужно разыскивать в форме потенциала простого слоя, а в случае краевого условия (6.57) — в форме потенциала двойного слоя. Получающиеся при этом интегральные уравнения, в силу соотношений (6.53) и (6.54), имеют слабо полярные ядра. Поэтому процесс последовательных приближений для них сходится.

§ 10. Свойства решений параболических систем

Отметим некоторые общие свойства решений параболических систем.

1) Регулярное решение параболической системы, коэффициенты и правая часть которого суть аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, само аналитично относительно этих переменных. Относительно переменной t такое предложение, вообще говоря, неверно.

2) Регулярное решение параболической системы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и правой частью бесконечно дифференцируемо.

3) Заданная в полупространстве $t \geqslant 0$ пространства E_{n+1} параболическая система называется *лиувиллевой*, если любое ограниченное регулярное решение соответствующей однородной системы есть постоянный вектор.

Например, параболическая система вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i_1, \ldots, i_{2p}=1}^{n} A^{(i_1, \ldots, i_{2p})} \frac{\partial^{2p} u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{2p}}} = 0$$

с постоянными коэффициентами является лиувиллевой.

4) Вектор-функция $u = u(t, x)$, суммируемая в области Q, называется *обобщенным решением* в этой области параболической системы (6.40), если для любой регулярной вектор-функции $v = v(t, x)$, равной нулю вне некоторой подобласти области Q, справедливо равенство

$$\int\limits_Q (u, L^*v)\, dt\, dx = \int\limits_Q (f, v)\, dt\, dx.$$

Здесь (u, v) означает скалярное произведение векторов u и v.

Всякое регулярное решение параболической системы с непрерывной правой частью и непрерывными коэффициентами является также ее обобщенным решением. Если коэффициенты системы (6.40) и ей сопряженной системы (6.42) удовлетворяют условиям 1) и 2) § 1, а вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет по x условию Гёльдера, то справедливо и обратное предложение: всякое обобщенное решение параболической системы является ее регулярным решением.

5) Для решений однородного параболического уравнения вида (6.51) с $c(t, x) = 0$ справедлив принцип максимума (минимума): регулярное и отличное от постоянной в цилиндре $Q = [0, T] \times D$ решение этого уравнения не может принимать свое наибольшее (наименьшее) значение внутри цилиндра или на его верхнем основании.

ГЛАВА VII

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Задача Коши для гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными и с начальными данными на линии параболичности

1. Теорема существования и единственности. Рассмотрим уравнение

$$K(y)\,h(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+\,b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)\,u=f(x,y), \quad (7.1)$$

где $h(x,\ y)>0$, $K(0)=0$ и $K(y)>0$ при $y>0$.

Уравнение (7.1) в полуплоскости $y>0$ принадлежит к гиперболическому типу с параболическим вырождением вдоль прямой $y=0$.

Пусть D — область, ограниченная отрезком $[x_1,\ x_2]$ оси x и характеристиками l_1 и l_2 уравнения (7.1), выходящими соответственно из точек $A_1(x_1,\ 0)$ и $A_2(x_2,\ 0)$ и пересекающимися в точке C.

Теорема 1.1 [26]. *Пусть:* 1) *функция* $h(x,\ y)>0$ *имеет непрерывные производные до второго порядка в замкнутой области* $\overline{D}$;

2) $K(y)$ — *непрерывная и монотонно возрастающая функция, причем* $K(0)=0$;

3) $a(x,\ y)$, $b(x,\ y)$, $c(x,\ y)$ *и* $f(x,\ y)$ *непрерывны и имеют непрерывные производные второго порядка по* x *в* $\overline{D}$;

4) $\lim\limits_{y \to 0} \frac{y a(x, y)}{\sqrt{K(y)}} = 0.$

Тогда существует единственное непрерывное в $\bar{D}$ решение уравнения (7.1), *имеющее непрерывные производные второго порядка в $\bar{D}$, удовлетворяющее начальным данным*

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x) \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2), \tag{7.2}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные функции, имеющие производные третьего порядка, удовлетворяющие условию Липшица.

Решение непрерывно зависит от начальных данных, т. е. задача Коши (7.1), (7.2) корректна.

Если условие 4) теоремы 1.1 не выполнено, то задача Коши для уравнения (7.1) с начальными данными (7.2) на линии параболического вырождения, вообще говоря, может оказаться некорректной.

2. Случай $K(y) = y^m$ $(m > 0)$:

$$y^m h(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y). \tag{7.3}$$

Условие 4) теоремы 1.1 в этом случае принимает следующий вид:

$$\lim_{y \to 0} y^{1 - \frac{m}{2}} a(x, y) = 0. \tag{7.4}$$

При $0 < m < 2$ задача Коши для уравнения (7.3) с начальными данными (7.2) поставлена корректно, так как условие (7.4) выполнено для любой ограниченной функции $a(x, y)$. При $m \geqslant 2$ и при невыполнении условия (7.4) задача Коши, вообще говоря, может оказаться некорректной [3], [21], [22]. При $m = 2$ задача Коши корректна, если $|a(x, 0)| < 2$ [25].

Приведенный ниже пример показывает, что для корректности задачи Коши для уравнения (7.3) с начальными данными (7.2) на линии параболического вырождения условие (7.4) не является необходимым.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ay^{\frac{m}{2}-1}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{7.5}$$

где $m\geqslant 2$, $a\neq 0$ — вещественные числа.

Легко видно, что условие (7.4) не выполняется.

При $|a|<\frac{m}{2}$ решение уравнения (7.5), удовлетворяющее начальным данным (7.2), существует и дается формулой

$$u(x, y)=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}y\int_0^1\nu\left[x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times(2t-1)\right]t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\,dt, \tag{7.6}$$

где

$$\alpha=\frac{m-2a}{2(m+2)},\quad \beta=\frac{m+2a}{2(m+2)}.$$

Это решение единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Таким образом, при $|a|<\frac{m}{2}$ задача Коши для уравнения (7.5) с начальными данными (7.2) на линии параболичности корректна.

3. Задача Коши с начальными данными на линии параболичности, являющейся одновременно характеристикой. Пусть дано уравнение

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=$$

$$=f(x, y)\quad(0<m<2), \tag{7.7}$$

гиперболическое в полуплоскости $y>0$.

Его характеристики, ветви семейства парабол

$$\xi=x-\frac{2}{2-m}y^{1-\frac{m}{2}}=\text{const},\quad \eta=x+\frac{2}{2-m}y^{1-\frac{m}{2}}=\text{const}, \tag{7.8}$$

имеют своей огибающей ось y — параболическую линию уравнения (7.7). Таким образом, $y=0$ — линия параболического вырождения уравнения (7.7) — является одновременно его характеристикой. Это обстоятельство существенно отличает уравнение (7.7) от уравнения (7.1). Поведение решения уравнения (7.7) в окрестности линии параболического вырождения зависит от коэффициента $b(x, y)$ при производной $\frac{\partial u}{\partial y}$ и показателя m. Решение $u(x, y)$ уравнения (7.7) и его производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ могут, вообще говоря, обращаться в бесконечность на параболической линии. Поэтому для уравнения (7.7), кроме обычной задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения, которая может оказаться неразрешимой, естественно исследовать задачу с видоизмененными начальными данными:

$$\lim_{y\to 0} \varphi(x, y)\, u(x, y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0} \psi(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_1(x), \tag{7.9}$$

где

$$\lim_{y\to 0} \varphi(x, y) = 0, \quad \lim_{y\to 0} \psi(x, y) = 0.$$

Пусть D — область, ограниченная отрезком $[x_1, x_2]$ оси x и характеристиками l_1 и l_2 уравнения (7.7), выходящими соответственно из точек $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, 0)$ и пересекающимися в точке C.

Теорема 1.2. *Если коэффициенты и свободный член уравнения (7.7) непрерывны и имеют непрерывные первые производные по x в замкнутой области $\bar{D}$ и если $0 < m < 1$, то существует единственное непрерывное в $\bar{D}$ решение уравнения (7.7), имеющее непрерывные производные второго порядка в D, удовлетворяющее начальным данным*

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x) \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2), \tag{7.10}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Решение задачи Коши (7.7), (7.10) непрерывно зависит от начальных данных.

Теорема 1.3. *Пусть:* 1) *коэффициенты уравнения* (7.7) *непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка по* x *в замкнутой области* $\overline{D}$;

2) $y^{1-m} b(x, y) = \delta(x, y)$, $\delta(x, y) \to 0$ *при* $y \to 0$ *равномерно относительно* x;

3) $f(x, y) = y^{\frac{m}{2}} \psi(x, y)$, *где* $\psi(x, y)$ *непрерывна и имеет непрерывную первую производную по* x *в* $\overline{D}$.

Тогда существует единственное непрерывное в $\overline{D}$ *решение уравнения* (7.7), *имеющее непрерывные производные второго порядка в* D *и удовлетворяющее начальным данным*

$$u|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{7.11}$$

Теорема 1.4. *Пусть коэффициенты и свободный член уравнения* (7.7) *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a(x, y)$, $c(x, y)$ *и* $f(x, y)$ *непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка по* x *в замкнутой области* $\overline{D}$;

2) $b(x, y) = y^{m-1}[\alpha + y^{2-m} b_1(x, y)]$, $\alpha = \text{const}$, $m - 1 < \alpha < 1$ *при* $1 \leqslant m < 2$, $0 < \alpha < 1$ *при* $0 < m < 1$, *а* $b_1(x, y)$ *непрерывна и имеет непрерывную первую производную по* x *в* $\overline{D}$.

Тогда существует единственное непрерывное в $\overline{D}$ *решение уравнения* (7.7), *имеющее непрерывные производные второго порядка в области* D *и удовлетворяющее начальным данным*

$$u|_{y=0} = \tau(x), \qquad y^{\alpha} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu_1(x) \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2), \tag{7.12}$$

где $\tau(x)$ *и* $\nu_1(x)$ *имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.*

Решение задачи Коши (7.7), (7.12) непрерывно зависит от начальных данных.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha y^{m-1} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (0 < m < 2), \tag{7.13}$$

где α — постоянная. Решение уравнения (7.13), удовлетворяющее начальным данным (7.12), дается формулами:

при $\frac{m}{2} < \alpha < 1$

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] \times$$
$$\times t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt + \frac{\Gamma(2-2\beta)\, y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)} \times$$
$$\times \int_0^1 \nu_1\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\, dt;$$

при $m - 1 < \alpha < \frac{m}{2}$

$$u(x,y) =$$
$$= \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] t^{\beta}(1-t)^{\beta}\, dt -$$
$$- \frac{2\Gamma(1+2\beta)\, y^{\frac{2-m}{2}}}{(2-m)\Gamma^2(1+\beta)} \int_0^1 \tau'\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] \times$$
$$\times t^{\beta}(1-t)^{\beta}(1-2t)\, dt +$$
$$+ \frac{\Gamma(-2\beta)\, y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma^2(-\beta)} \int_0^1 \nu_1\left[x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} (2t-1)\right] \times$$
$$\times t^{-\beta-1}(1-t)^{-\beta-1}\, dt, \quad \beta = \frac{2\alpha - m}{2(2-m)};$$

при $\alpha = \frac{m}{2}$

$$u(x, y) = \frac{\tau\left(x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}\right) + \tau\left(x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}\right)}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}}^{x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}} \nu_1(t)\, dt.$$

4. Метод Римана. Для решения задачи Коши для уравнений (7.3) и (7.7) с начальными данными на линии параболичности можно применить метод Римана [1], [5], [19] (см. также гл. II).

Пример 3. Найти в полуплоскости $y>0$ решение уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (m>0), \tag{7.14}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u|_{y=0} = \tau(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \tag{7.15}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Уравнение (7.14) в характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, \qquad \eta = x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} \tag{7.16}$$

приводится к уравнению Эйлера — Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{\beta}{\xi - \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}. \tag{7.17}$$

Начальные условия (7.15) принимают вид

$$\lim_{\eta - \xi \to 0} u(\xi, \eta) = \tau(\xi),$$

$$\lim_{\eta - \xi \to 0} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta} (\eta - \xi)^{2\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \nu(\xi). \tag{7.18}$$

Для уравнения (7.17) функция Римана известна:

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{(\eta - \xi)^{2\beta}}{(\eta_0 - \xi)^{\beta} (\eta - \xi_0)^{\beta}} F(\beta, \beta; 1; \sigma), \tag{7.19}$$

где F — гипергеометрическая функция и

$$\sigma = \frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi - \eta_0)(\eta - \xi_0)}. \tag{7.20}$$

Обозначим через D область, ограниченную отрезком P_1P_2 прямой $\eta = \xi + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и характеристиками PP_1: $\xi = \xi_0$ и PP_2: $\eta = \eta_0$.

Согласно формуле Римана имеем:

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{(uv)_{P_1} + (uv)_{P_2}}{2} + \\ + \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left[\frac{2\beta v}{\eta - \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right] u\, d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) v\, d\xi. \qquad (7.21)$$

Принимая во внимание (7.18), из формулы (7.21) в пределе при $\varepsilon \to 0$ получим:

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \frac{\tau(\xi)(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\beta}\, d\xi}{(\eta_0 - \xi)^{1-\beta}(\xi - \xi_0)^{1-\beta}} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \frac{\nu(\xi)\, d\xi}{(\eta_0 - \xi)^{\beta}(\xi - \xi_0)^{\beta}}. \qquad (7.22)$$

Возвращаясь к старым переменным (x, y), окончательно будем иметь:

$$u(x, y) = \\ = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t - 1)\right] t^{\beta-1}(1 - t)^{\beta-1}\, dt + \\ + \frac{\Gamma(2 - 2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t - 1)\right] t^{-\beta}(1 - t)^{-\beta}\, dt. \qquad (7.23)$$

§ 2. Задача Коши для гиперболических уравнений, вырождающихся на начальной плоскости

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) u = f(x, t), \qquad (7.24)$$

$x=(x_1, \ldots, x_n)$, гиперболическое в полупространстве $t>0$. Будем уравнение (7.24) называть *гиперболическим уравнением, вырождающимся на начальной плоскости*, если при $t=0$ хотя бы одно из собственных чисел матрицы $\|a_{ij}(x, t)\|$ обращается в нуль.

Для уравнения (7.24) рассмотрим задачу Коши с начальными данными [12]

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{7.25}$$

Предположим, что выходящий из точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, t^0)$ $(t^0>0)$ характеристический коноид уравнения (7.24) регулярен вплоть до плоскости $t=0$ и вырезает из нее n-мерную область B, так что боковая поверхность S коноида вместе с областью B ограничивает в $(n+1)$-мерном пространстве некоторую конусообразную область D. Обозначим через $B(t_1)$ сечение D плоскостью $t=t_1$, где $0<t_1<t^0$, а через $D_{t_1t_2}$ — часть D, заключенную между плоскостями $t=t_1$, $t=t_2$, и положим $D_t=D_{0t}$.

Теорема 2.1. *Пусть*: 1) $a_{ij}(x, t)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $\left[\frac{3n}{2}\right]+5$ *в* D_l; $b_i(x, t)$, $c(x, t)$ *и* $f(x, t)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $\left[\frac{3n}{2}\right]+4$ *в* D_l; *из них производные вида* $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$ $(k=0, 1, \ldots, n+2)$ *ограничены в* D_l, *и* $f(x, t)$ *непрерывна в* $\overline{D_l}$;

2) *начальные данные* $\varphi_0(x)$ *и* $\varphi_1(x)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $\left[\frac{3n}{2}\right]+6$ *в* B.

Пусть, далее, существует возрастающая непрерывно дифференцируемая функция $\rho(t)$, $0<\rho(t)\leqslant \inf\limits_{x\in B(t)} \tilde{\rho}(x, t)$, *где* $\tilde{\rho}(x, t)$ — *наименьшее собственное число матрицы* $\|a_{ij}(x, t)\|$. *Допустим еще, что любому достаточно малому* $\delta>0$ *можно привести в соответствие такое* $T(\delta)>0$, *что в области* $D_{T(\delta)}$ *квадратичная форма*

$$\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a_{ij}}{\rho^{1+\delta}}\right)\xi_i\xi_j \tag{7.26}$$

неположительна. Тогда, если

$$\frac{d\rho^{\frac{1}{2}}(t)}{dt} \geqslant g t^{-\sigma}, \tag{7.27}$$

где $g > 0$, $\sigma > 0$ — *постоянные, то существует единственное решение* $u(x, t)$ *задачи Коши* (7.24), (7.25), *имеющее непрерывные вторые производные в* D_η, *где* $\eta > 0$ *достаточно мало.*

Задача Коши корректна.

Не ограничивая общности, можно считать $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0$. Пусть u_ε есть решение следующей задачи Коши: u_ε удовлетворяет уравнению (7.24) в $D_{\varepsilon l}$ и при $t = \varepsilon > 0$ — однородным начальным условиям. Решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения (7.24) с начальными данными

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0 \tag{7.28}$$

получается как предел последовательности $u_\varepsilon(x, t)$, равномерно сходящейся вместе с производными до второго порядка внутри D_η.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены сформулированные в теореме* 2.1 *ограничения на гладкость коэффициентов, на правую часть уравнения* (7.24) *и на начальные данные* (7.25). *Пусть, далее, существует возрастающая функция* $\rho(t)$, $0 < \rho(t) \leqslant \inf\limits_{x \in B(t)} \tilde{\rho}(x, t)$, *имеющая монотонную производную, и выполнено неравенство* (7.26). *Тогда, если для всех достаточно малых* $\lambda > 0$

$$m < \frac{d\rho^{\frac{1}{2}}(t)}{dt} < M(\lambda)\, t^{-\lambda},$$

где m, $M(\lambda)$ — *положительные постоянные, и*

$$\max\left\{|b_i|, \quad \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_s}\right|\right\} < \frac{1}{(n+1)^2\left(n + \dfrac{7}{4m^2}\right)},$$

то существует единственное решение $u(x, t)$ *задачи Коши* (7.24), (7.25), *имеющее непрерывные производные в* D_η, *где* $\eta > 0$ *достаточно мало.*

Задача Коши корректна до порядка $\left(2, \left[\frac{3n}{2}\right] + 6\right)$ в D_η.

2. Рассмотрим гиперболическое уравнение, вырождающееся при $t=0$:

$$K(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u=f(x,t), \qquad (7.29)$$

где $K(0)=0$ и $K(t)>0$ при $t>0$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ $(a_{ij}=a_{ji})$, b_i, c и свободный член f определены в некоторой замкнутой области $\overline{D}$ полупространства $t>0$, прилегающей к области B на плоскости $t=0$.

Пусть в $\overline{D}$ имеет место

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant c^2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2. \qquad (7.30)$$

Для уравнения (7.29) ставится задача Коши с начальными данными

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \qquad (7.31)$$

Теорема 2.3 [2]. *Пусть:* 1) $K(t)$ — *функция, непрерывная вместе с производными до порядка* $\left[\frac{3n}{2}\right]+6$ *при* $t>0$; *при малых* t

$$c_1t^m\leqslant K(t)\leqslant c_2t^m, \quad c_3t^{m-1}\leqslant K'(t)\leqslant c_4t^{m-1},$$

где c_i $(i=1, 2, 3, 4)$ — *некоторые положительные постоянные,* $m>0$ — *вещественное число;*

2) *коэффициенты* $a_{ij}(x,t)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $\left[\frac{3n}{2}\right]+6$ *в* D; $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $\left[\frac{3n}{2}\right]+5$ *в* D;

3) *начальные данные* $\varphi_0(x)$ *и* $\varphi_1(x)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $\left[\frac{3n}{2}\right]+7$ *в* B.

Тогда, если $0<m<1$, *то существует единственное решение* $u(x, t)$ *задачи Коши* (7.29), (7.31); *имеющее непрерывные вторые производные по пространственным координатам при* $t \geqslant 0$ *и по времени при* $t>0$. *При* $t=0$ *непрерывно выражение* $K(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Задача Коши корректна.

При $1 \leqslant m<2$ задача Коши для уравнения (7.29) с начальными данными (7.31), вообще говоря, может оказаться некорректной.

§ 3. Смешанная задача для гиперболических уравнений, вырождающихся на начальной плоскости

1. Постановка задачи. Определение обобщенного решения. Пусть в цилиндрической области $Q=D\times(0<t<T)$, где D — конечная область в n-мерном евклидовом пространстве E^n, с границей Γ дано гиперболическое уравнение, вырождающееся при $t=0$ [14]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+ \\ +\sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x, t)\, u=f(x, t), \quad (7.32)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $a_{ij}=a_{ji}$,

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\,\xi_i\xi_j \geqslant c^2 t^m \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (7.33)$$

c^2, m — положительные постоянные.

Для уравнения (7.32) ставится смешанная задача: определить в цилиндре Q решение этого уравнения, удовлетворяющее однородному граничному условию

$$u|_\Gamma=0 \text{ при } t\in[0, T] \quad (7.34)$$

и начальным данным

$$u|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \quad (7.35)$$

Обозначим через $\mathring{\Omega}$ многообразие всех непрерывных в Q функций $u(x, t)$, имеющих непрерывные первые и ограниченные вторые производные и обращающихся в нуль в граничной полоске (своей для каждой функции) цилиндрической области Q, исключая верхнее основание. Введем в этом многообразии скалярное произведение по формуле

$$\{u, v\} = \iint_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{t^{2\eta}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx\, dt \qquad (7.36)$$

$$\left(\eta = \text{const}; \quad 0 < \eta < \frac{1}{2} \right).$$

Замыкая $\mathring{\Omega}$ в метрике (7.36), получим многообразие $\dot{\Omega}$ функций, имеющих обобщенные первые производные по x_i и t в любой области $Q^\delta = Q \cap (t \geqslant \delta)$, принимающих в среднем нулевые граничные значения и обращающихся в среднем в нуль при $t = 0$.

Под *решением* (обобщенным) *смешанной задачи* будем понимать такую функцию $u(x, t) \in \dot{\Omega}$, что для любой функции $v(x, t)$ вида $v(x, t) = \int_T^t w(x, \tau)\, d\tau$, где функция $w(x, t)$ такова, что

$$w|_\Gamma = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \quad \text{и} \quad \iint_Q \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx\, dt < \infty,$$

выполняется интегральное тождество

$$-\left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \left[\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] + \left[\left(c(x, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) u, v \right] = [f, v]. \quad (7.37)$$

Здесь и в дальнейшем $[\varphi, \psi] = \iint_Q \varphi \psi\, dx\, dt$.

2. Существование и единственность обобщенного решения.

Теорема 3.1. *Пусть:* 1) $a_{ij}(x, t)$ *непрерывны в* $\bar{Q}$ *и имеют ограниченные первые производные по* t *при* $t>0$;

2) $b_i(x, t)$, $\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ *непрерывны в* $Q \cap (t \geqslant \delta)$ (δ — *любое положительное число), причем в окрестности* $t=0$ $b_i(x, t) = O(t^{\frac{m}{2}-1}\beta(t))$, $\frac{\partial b_i}{\partial x_i} = O(t^{\frac{m}{2}-1}\beta(t))$ *для каждого* $x \in D$, *где* $\beta(t) \to 0$ *при* $t \to 0$;

3) $c(x, t)$ *непрерывна в* $Q \cap (t \geqslant \delta)$, *причем* $c(x, t) = O(t^{-\sigma})$, $0 \leqslant \sigma < 1$.

Пусть, далее,

$$\sum_{i, j=1}^{n} \left((m+\delta_0) a_{ij} - t\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\xi_i\xi_j \geqslant \mu^2 t^m \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{7.38}$$

(μ^2, δ_0 — *положительные постоянные*).

Тогда, если $f(x, t)$ *имеет конечный интеграл*

$$\iint\limits_Q \frac{f^2(x, t)}{t^{m-1+\delta_0}}\,dx\,dt,$$

то обобщенное решение $u(x, t)$ *смешанной задачи для уравнения* (7.32) *существует, причем для* $u(x, t)$ *справедлива оценка*

$$\left[\frac{1}{t^{m+1+\delta_0}}\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right] + \left[\frac{1}{t^{1+\delta_0}}, \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant c^2\left[f^2(x, t), \frac{1}{t^{m-1+\delta_0}}\right]. \tag{7.39}$$

Если, кроме того,

$$\sum_{i, j=1}^{n}\left(\eta a_{ij} + t\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\xi_i\xi_j \geqslant c_1^2 t^m \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \tag{7.40}$$

то обобщенное решение единственно в классе функций $u(x, t) \in \dot{\Omega}$.

Условия (7.38) и (7.40) носят характер ограничений на поведение коэффициентов $a_{ij}(x, t)$ при $t \to 0$. Условия 2), в частности, означают, что $b_i(x, t)$ при $0 < m < 2$ могут быть неограниченными при $t \to 0$, а при $m \geqslant 2$ должны стремиться к нулю.

3. Дифференциальные свойства решения.

Теорема 3.2. *Пусть:* 1) $a_{ij}(x, t)$ *непрерывны в* $\bar{Q}$ *и имеют ограниченные производные* $\frac{\partial^3 a_{ij}}{\partial t^3}$ при $t > 0$;

2) $b_i(x, t)$, $c(x, t)$ *непрерывны вместе со своими первыми производными по* t *в* $\bar{Q}$, *причем при* $m \geqslant 2$

$$b_i(x, t) = O(t^{\frac{m}{2}-1}\beta(t)), \quad t\frac{\partial b_i}{\partial t} = O(t^{\frac{m}{2}-1}\beta(t)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

3) $f(x, 0) = f'_t(x, 0) = \ldots = f_t^{([m]+1)}(x, 0) = 0$.

Пусть, далее,

$$\sum_{i, j=1}^{n} \left((m + \delta_0) a_{ij} - t\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\xi_i\xi_j \geqslant \mu^2 t^m \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{7.41}$$

$$\sum_{i, j=1}^{n} \left(\frac{3m}{2} a_{ij} - t\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \tag{7.42}$$

$$\sum_{i, j=1}^{n} t^k \frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k}\xi_i\xi_j \leqslant c^2 \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \qquad (k = 2, 3). \tag{7.43}$$

Тогда существуют $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, *суммируемые с квадратом по* Q, *причем справедлива оценка*

$$\left[\frac{T-t}{t^{2m+\delta_0+1}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + \left[\frac{T-t}{t^{m+1+\delta_0}}, \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right)^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant c_1^2\left\{\left[f^2, \frac{1}{t^{2m+\delta_0+1}}\right] + \left[f_t'^2, \frac{1}{t^{2m-1+\delta_0}}\right]\right\},$$

где $0 < \delta_0 < [m] + 1 - m$.

Имеют место аналогичные оценки для норм производных по t более высокого порядка от решения $u(x, t)$ смешанной задачи.

Теорема 3.3. *Пусть*: 1) $u(x, t)$ — *решение смешанной задачи, допускающее производные вида* $\frac{\partial^l u}{\partial t^l}$, $\frac{\partial^l u}{\partial t^{l-1}\partial x_i}$ $(l=1, 2, \ldots, p;\ i=1, 2, \ldots, n)$, *причем они имеют конечную норму по любой области* Q_δ $(\delta > 0)$ *);

2) *коэффициенты* $a_{ij}(x, t)$ *имеют в* Q_δ *непрерывные производные вида* $\frac{\partial^q a_{ij}}{\partial t^k \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_r}}$ $(r \leqslant p,\ k < p-1,\ q = k + r \leqslant p)$;

3) $b_i(x, t)$ *и* $c(x, t)$ *имеют в* Q_δ *непрерывные производные вида*

$$\frac{\partial^\mu}{\partial t^\lambda \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_s}} \qquad (s \leqslant p-1,\ \lambda \leqslant p-2,\ \mu = \lambda + s \leqslant p-1),$$

а $f(x, t)$ *допускает производные вида*

$$\frac{\partial^\mu}{\partial t^\lambda \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_s}} \qquad (s \leqslant p-1,\ \lambda \leqslant p-2,\ \mu = \lambda + s \leqslant p-1),$$

суммируемые в квадрате внутри Q. *Тогда решение* $u(x, t)$ *имеет внутри* Q *все производные до* p-*го порядка, причем справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{l_1, \ldots, l_r \\ q=r+k}}^{q=p} \left\| \frac{\partial^q u}{\partial t^k \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_r}} \right\|'' \leqslant c \left\{ \sum_{\substack{\mu=0 \\ \lambda+s=\mu}}^{p-1} \left\| \frac{\partial^\mu f}{\partial t^\lambda \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_s}} \right\|' + \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{p} \left(\left\| \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} \right\|' + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^\nu u}{\partial x_j \partial t^{\nu-1}} \right\|' \right) \right\} \text{**)}. \tag{7.44}$$

Пользуясь теоремами вложения С. Л. Соболева [18], можно сформулировать достаточные условия на коэффициенты уравнения (7.32) и на начальные и граничные значения, при которых все производные решения $u(x, t)$, входящие в уравнение (7.32), существуют и непрерывны в Q_δ при любом $\delta > 0$.

---

*) Q_δ — область, состоящая из точек $(x, t) \in Q$, отстоящих от боковой поверхности цилиндра и от $t = 0$ на расстоянии больше δ, $\delta > 0$.

**) Через $\| \ \|'$ обозначена норма по области Q_δ, через $\| \ \|''$ — по $Q_{2\delta}$.

Пусть, например, в уравнении (7.32) коэффициенты $a_{ij}(x, t)$ непрерывны в $\bar{Q}$ и имеют ограниченные производные $\frac{\partial^{4+\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{ij}}{\partial t^{4+\left[\frac{n+1}{2}\right]}}$ при $t > 0$; $b_i(x, t)$, $c(x, t)$ непрерывны в $\bar{Q}$ и имеют ограниченные производные по t в Q до порядка $2 + \left[\frac{n+1}{2}\right]$ включительно, причем при $m \geqslant 2$

$$b_i(x, t) = O\left(t^{\frac{m}{2}-1} \beta(t)\right),$$

$$t \frac{\partial b_i}{\partial t} = O\left(t^{\frac{m}{2}-1} \beta(t)\right),$$

. . . .

$$t^{2+\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{\partial^{2+\left[\frac{n+1}{2}\right]} b_i}{\partial t^{2+\left[\frac{n+1}{2}\right]}} = O\left(t^{\frac{m}{2}-1} \beta(t)\right)$$

и

$$f(x, 0) = f_t'(x, 0) = \ldots =$$

$$= f_t^{\left(\left(2+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)([m]+1)+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}(x, 0) = 0.$$

Пусть, далее, выполнены условия (7.41)—(7.43) и им аналогичные, вплоть до условия

$$\sum_{i, j=1}^{n} t^{4+\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{\partial^{4+\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{ij}}{\partial t^{4+\left[\frac{n+1}{2}\right]}} \xi_i \xi_j \leqslant c^2 \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Тогда существуют производные

$$\frac{\partial^{3+\left[\frac{n+1}{2}\right]} u}{\partial t^{3+\left[\frac{n+1}{2}\right]}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{3+\left[\frac{n+1}{2}\right]} u}{\partial t^{2+\left[\frac{n+1}{2}\right]} \partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

суммируемые с квадратом по Q вплоть до $t = 0$.

Если, кроме того, $a_{ij}(x, t)$ допускают в Q_δ непрерывные производные вида $\frac{\partial^q a_{ij}}{\partial t^k \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_r}}$ $\left(q \leqslant 3 + \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$, $b_i(x, t)$ и $c(x, t)$ имеют в Q_δ непрерывные производные вида

$\dfrac{\partial^\mu}{\partial t^\lambda \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_s}}$ $\left(\mu \leqslant 2+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$, а свободный член $f(x, t)$ допускает производные вида $\dfrac{\partial^\mu}{\partial t^\lambda \partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_s}}$ $\left(\mu \leqslant 2+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$, то решение $u(x, t)$ имеет внутри Q все производные до $\left(3+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$-го порядка, суммируемые с квадратом.

При этом $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i}$ непрерывны в Q, т. е. обобщенное решение смешанной задачи будет классическим решением.

Смешанная задача для уравнения (7.32) с неоднородными начальными и граничными условиями сводится к рассмотренному случаю однородных условий.

4. Рассмотрим теперь уравнение

$$K(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u = f(x, t), \tag{7.45}$$

где $K(0)=0$ и $K(t)>0$ при $t>0$; $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Коэффициенты $a_{ij}(x, t)$ $(a_{ij}=a_{ji})$, $b_i(x, t)$, $c(x, t)$ и свободный член $f(x, t)$ определены в цилиндрической области $Q = D\times(0<t<T)$. Пусть в $\bar{Q}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant c^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Для уравнения (7.45) ставится смешанная задача, сформулированная в п. 1 настоящего параграфа.

Теорема 3.4 [3]. *Пусть:* 1) $K(t)$ — *функция, непрерывная вместе со своей производной при* $t>0$; *при малых* t

$$c_1 t^m \leqslant K(t) \leqslant c_2 t^m, \quad c_3 t^{m-1} \leqslant K'(t) \leqslant c_4 t^{m-1},$$

где c_i $(i=1, 2, 3, 4)$ — *некоторые положительные постоянные,* $m>0$ — *вещественное число;*

2) *коэффициенты* $a_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$, $c(x, t)$ *непрерывны в* $\bar{Q}$, *свободный член* $f(x, t)$ *непрерывно дифференцируем.*

Тогда, если $0<m<1$, *существует обобщенное решение смешанной задачи, имеющее суммируемые с квадратом первые производные.*

Если, кроме того, $a_{ij}(x, t)$ *имеют ограниченные производные второго порядка по пространственным координатам* $x_1, \ldots, x_n$, $b_i(x, t)$ *имеют ограниченные производные вида* $\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ *в* Q, *то обобщенное решение единственно.*

§ 4. Смешанная задача для гиперболических уравнений, вырождающихся на части боковой границы области

1. Постановка задачи. Пусть в цилиндрической области $Q=D\times(0<t<T)$ дано гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+ \\ +\sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x, t)u=f(x, t). \qquad (7.46)$$

Будем предполагать, что конечная область $D\subset E^n$ расположена в полупространстве $x_n>0$ и примыкает частью Γ_0 своей границы Γ к плоскости $x_n=0$. Остальную часть границы обозначим через Γ_1, $\Gamma_0\cup\Gamma_1=\Gamma$. Предполагаем, что граница Γ_1 такова, что для нее имеют место теоремы вложения С. Л. Соболева. Предположим, что функции $a_{ij}(x, t)$ непрерывны в $\bar{Q}$ и для любой точки $(x, t)\in Q$ и любых чисел ξ_i, $\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2>0$,

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j>0, \qquad (7.47)$$

а для точек $(x, t)\in B_0=\Gamma_0\times(0<t<T)$

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j\geqslant 0, \qquad (7.48)$$

причем ранг последней квадратичной формы $\leqslant n-1$. Будем предполагать, что для любых ξ_i

$$0 \leqslant x_n^m \xi_n^2 \leqslant c_1^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \text{ равномерно по } t, \tag{7.49}$$

а также

$$c^2 x_n^m \leqslant a_{nn}(x, t) \leqslant C^2 x_n^m \text{ равномерно по } t. \tag{7.50}$$

Пусть $\mathring{\Omega}$ — многообразие всех непрерывных в Q функций, имеющих ограниченные кусочно непрерывные вторые производные по t и вторые смешанные производные по t и x_i и обращающихся в нуль в некоторой (своей для каждой функции) граничной полоске цилиндра Q, исключая верхнее основание. Введем обозначение

$$G_2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial t} \right).$$

Многообразие, составленное из элементов $G_2 u$, где $u \in \mathring{\Omega}$, обозначим через $\mathring{R}$. Введем в $\mathring{R}$ скалярное произведение по формуле

$$\{ G_2 u, G_2 v \} =$$
$$= \iint_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial t} \right) dx\, dt. \tag{7.51}$$

Пусть $\dot{R}$ — замыкание $\mathring{R}$ в метрике (7.51). Многообразие всех функций $u(x, t)$, полученных в результате замыкания $\mathring{R}$, обозначим через $\dot{\Omega}$.

Метрика (7.51) обеспечивает сохранение нулевых начальных условий, а при $0 < m < 1$ и нулевых граничных значений; при $m \geqslant 1$ на B_0 нулевые граничные значения не сохраняются (см. [8]). Для $\frac{\partial u}{\partial t}$, а следовательно (в силу нулевых начальных условий), и для $u(x, t)$ справедливо следующее: если выполнены неравенства (7.49), то

$$\iint_Q \sigma(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx\, dt \leqslant c_0^2 \{ G_2 u, G_2 u \}, \tag{7.52}$$

где c_0^2 не зависит от $u(x, t)$, $\sigma(x)$ — достаточно гладкая функция, $\sigma(x) > 0$ для (x, t) с $x_n > 0$ и

$$\sigma(x) = \begin{cases} O(x_n^{m-2} |\ln x_n|^{-1-\varepsilon_0}) & \text{для } m \neq 1, \\ O(x_n^{-1} |\ln x_n|^{-2-\varepsilon_0}) & \text{для } m = 1 \end{cases} \qquad (\varepsilon_0 > 0).$$

Для уравнения (7.46) ставится смешанная задача: найти в цилиндре Q решение $u(x, t)$ этого уравнения, удовлетворяющее при $t = 0$ однородным начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

и принимающее на $B_1 = \Gamma_1 \times (0 < t < T)$ нулевые граничные значения; далее, на $B_0 = \Gamma_0 \times (0 < t < T)$ при $0 < m < 1$ задаются нулевые граничные значения, а при $m \geqslant 1$ B_0 от задания граничных значений функции $u(x, t)$ освобождается.

Под *обобщенным решением смешанной задачи* будем понимать функцию $u(x, t) \in \dot{\Omega}$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right] + \left[\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right] + \\ + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\right] + [cu, v] = [f, v] \qquad (7.53)$$

для любой функции $v(x, t)$, обращающейся в нуль на B_1 и вблизи B_0, для которой

$$\iint\limits_Q \left[v^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right] dx\,dt < \infty.$$

2. Существование и единственность обобщенного решения.

Теорема 4.1 [14]. *Пусть: 1) функции $a_{ij}(x, t)$ непрерывны и имеют ограниченные третьи производные по t в $\bar{Q}$, причем*

$$\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^k a_{ij}}{\partial t^k} \xi_i \xi_j \leqslant c_1^2 \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \qquad (k = 1, 2, 3) \quad (7.54)$$

равномерно по t и x;

2) *$b_i(x, t)$, $c(x, t)$ непрерывны вместе с первыми производными по t в Q и $f(x, t)$, $f'_t(x, t) \in L_2(Q)$.*

Пусть, далее, выполнены условия (7.49), (7.50) *и, кроме того,*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2(x, t)\xi_i^2 \leqslant c_2^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j, \tag{7.55}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial b_i}{\partial t}\right)^2 \xi_i^2 \leqslant c_3^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j. \tag{7.56}$$

Тогда обобщенное решение смешанной задачи существует и единственно в классе функций $u(x, t) \in \dot{\Omega}$.

Условия (7.55), (7.56) означают, что коэффициенты $b_i(x, t)$ обращаются в нуль на B_0 и что, в частности, $b_n(x, t) = O(x_n^{m/2})$. Для $0 < m < 2$ можно несколько ослабить требование на коэффициенты $b_i(x, t)$. Так, например, в случае $n=1$ $b_n(x, t) = O(x^{m-1}|\ln x|^{-1-\varepsilon_0})$ $(\varepsilon_0 > 0)$.

3. Некоторые частные случаи вырождения. Рассмотрим случай, когда смешанная задача для уравнения (7.46) оказывается разрешимой и при несоблюдении условия (7.55). Пусть в прямоугольнике Q $(0 < x < 1,\ 0 < t < T)$ дано гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(ax\frac{\partial u}{\partial x}\right) - b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t)u = f(x, t), \tag{7.57}$$

где $a = \text{const} > 0$, $b(x) \geqslant \beta^2 > 0$.

Пусть $\mathring{\Omega}$ — множество всех непрерывных в Q функций, имеющих ограниченные кусочно непрерывные вторые производные по t и вторые смешанные производные по x и t и обращающихся в нуль в граничной полоске прямоугольника Q (исключая верхнее основание). Введем на этом множестве скалярное произведение по формуле

$$\{u, u\} = \iint_Q \left(x^{\frac{b(0)}{a}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2 + x^{\frac{b(0)}{a}+1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right)^2\right)dx\,dt. \tag{7.58}$$

Замыкание $\mathring{\Omega}$ в метрике (7.58) обозначим через $\dot{\Omega}$. Метрика (7.58) обеспечивает сохранение нулевых начальных условий и при $x=1$ — нулевых граничных условий. Из теоремы вложения для пространства функций с вырождающейся метрикой [8] имеем:

$$\left[x^{\frac{b(0)}{a}-1}|\ln x|^{-1-\varepsilon_0}\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial t}\right]\leqslant c_1\{u,\ u\} \qquad (\varepsilon_0>0). \quad (7.59)$$

Отсюда, учитывая нулевое начальное значение $u(x,\ t)$, получаем:

$$\left[x^{\frac{b(0)}{a}-1}|\ln x|^{-1-\varepsilon_0}u,\ u\right]\leqslant c_2\{u,\ u\}. \qquad (7.60)$$

Из оценки (7.60) видно, что функции $u(x,\ t)$ могут неограниченно расти при $x\to 0$, причем скорость их роста зависит от величины отношения $\frac{b(0)}{a}$. Чем больше это отношение, тем более широкий класс функций оказывается допустимым.

Смешанная задача длл уравнения (7.57) ставится так: найти в Q решение $u(x,\ t)$ уравнения (7.57), обращающееся в нуль при $x=1$ и принимающее при $t=0$ нулевые начальные значения $u\Big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$. На границе $x=0$ никаких граничных условий не задается.

Теорема 4.2. *Пусть функции* $b(x)$, $e(x,\ t)$, $c(x,\ t)$ *непрерывны в* $\overline{Q}$ *и имеют ограниченные первые производные по* t *в* Q, *причем* $b(x)\geqslant\beta^2>0$ *и* $|b(x)-b(0)|<Mx^{\alpha}$, $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$. *Пусть, далее,* $f(x,\ t)$, $f_t'(x,\ t)$ *суммируемы с квадратом с весом* $x^{\frac{b(0)}{a}}$ *по* Q. *Тогда обобщенное решение смешанной задачи для уравнения* (7.57) *существует и единственно в классе функций* $u(x,\ t)\in\dot{\Omega}$.

Замечание. Если коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial x}$ положителен и правая часть $f(x,\ t)$ уравнения (7.57) такова, что $f(x,\ t)$ и $f_t'(x,\ t)$ суммируемы с квадратом с весом $x^{-\frac{b(0)}{a}}$ по Q, то обобщенное решение смешанной задачи существует и единственно в классе функций, стремящихся к нулю при $x\to 0$ со скоростью, определяемой величиной $\frac{b(0)}{a}$. В этом случае и на границе $x=0$ задаются нулевые граничные значения $u(x,\ t)$.

§ 5. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области

1. Вводные замечания. Пусть D — конечная область n-мерного евклидова пространства. Переменную точку области D будем обозначать через x, а ее декартовы координаты — через $(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)\,u=F(x), \qquad (7.61)$$

где $A_{ij}\,(A_{ij}=A_{ji})$, B_i, C и F суть ограниченные функции в замкнутой области $\bar{D}$. Предположим, что коэффициенты $A_{ij}(x)$ непрерывны в $\bar{D}$.

Уравнение (7.61) называется *эллиптическим* в некоторой области, если в этой области все собственные числа матрицы $\|A_{ij}(x)\|$ положительны. Пусть уравнение (7.61) — эллиптическое в области D. Будем называть его ***вырождающимся эллиптическим уравнением*** в $\bar{D}$, если на всей границе области D или на некоторой части этой границы хотя бы одно из собственных чисел матрицы $\|A_{ij}(x)\|$ обращается в нуль; эту часть границы будем называть ***поверхностью вырождения*** уравнения (7.61).

В последующих пунктах этого параграфа мы приведем основные результаты об эллиптических уравнениях, вырождающихся на части границы области, причем линия вырождения совпадает с отрезком прямой $y=0$.

2. Постановка краевых задач. В области D, ограниченной отрезком $AB=\Gamma_0$ оси x и простой гладкой кривой Γ, выходящей из точек A и B и лежащей в полуплоскости $y>0$, рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+b(x,\,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\,y)\,u=f(x,\,y) \qquad (7.62)$$

эллиптическое в D, вырождающееся на отрезке AB оси x.

Коэффициент $c(x,\,y)\leqslant 0$ и $m>0$.

Регулярным решением уравнения (7.62) в области D будем называть функцию $u(x, y)$, имеющую непрерывные производные до второго порядка в области D и удовлетворяющую уравнению (7.62) во всех точках D.

Регулярное в области D решение уравнения $Lu = 0$, непрерывное в $\overline{D}$, не может принимать внутри области наибольшее положительное значение или наименьшее отрицательное значение.

Лемма 1. *Пусть непрерывная в $\overline{D}$ функция $u(x, y)$ удовлетворяет неравенству*

$$Lu \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \qquad (\text{в } D)$$

и принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение в некоторой точке $x_0 \in \Gamma_0$. Если значения $u(x, y)$ на кривой Γ меньше (больше), чем $u(x_0, 0)$, то

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial y} < 0 \qquad (> 0)$$

при условии, что этот предел существует.

Задача Дирихле. Найти в области D регулярное решение уравнения (7.62), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее краевому условию

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \quad u|_{\Gamma_0} = \tau(x),$$

где s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B; $\varphi(s)$ и $\tau(x)$ — непрерывные заданные функции, причем $\tau(A) = \varphi(l)$, $\tau(B) = \varphi(0)$.

Задача N. Найти в области D регулярное решение уравнения (7.62), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x) \quad (x \in \Gamma_0),$$

где $\nu(x)$ — непрерывная функция.

Задача K. Найти в области D регулярное решение уравнения (7.62), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} + A(x, y)\, u = \varphi(x, y) \quad \text{на } \Gamma,$$
$$u(x, y) = \tau(x) \quad \text{на } \Gamma_0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ — производная по некоторому направлению γ, образующему острый угол с внутренней нормалью $\boldsymbol{n}$ к кривой Γ. Функции A и φ и компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ удовлетворяют на $\overline{\Gamma}$ условию Гёльдера, $\tau(x)$ непрерывна при $x_0 \in \Gamma_0$, кроме того, $A \leqslant 0$.

Единственность задачи Дирихле и задачи N легко следует из принципа максимума и леммы 1.

В случае аналитических коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ из результатов И. Н. Векуа [7] следует, что:

Теорема 5.1. *Решение задачи Дирихле существует.*

Теорема 5.2. *Если в точках A и B направление γ составляет тупой угол с осью y, то существует единственное решение задачи K.*

3. Теория потенциала для уравнения

$$E(u) \equiv y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7.63}$$

Для уравнения (7.63) можно построить теорию потенциала, аналогичную теории потенциала для гармонических функций.

В полуплоскости $y > 0$ уравнение (7.63) имеет два фундаментальных решения:

$$q_1(x, y; x_0, y_0) = k_1 (r_1^2)^{-\beta} F(\beta, \beta; 2\beta; 1 - \sigma), \tag{7.64}$$

$$q_2(x, y; x_0, y_0) =$$
$$= k_2 \left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2} (r_1^2)^{-\beta} (1 - \sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta, 1-\beta; 2-2\beta; 1-\sigma),$$

где k_1 и k_2 — постоянные, (7.65)

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x - x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp y_0^{\frac{m+2}{2}}\right), \tag{7.66}$$

$$\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}.$$

Нетрудно видеть, что фундаментальные решения (7.64) и (7.65) удовлетворяют соответственно условиям

$$\left.\frac{\partial q_1(x, y; x_0, y_0)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad q_2(x, 0; x_0, y_0) = 0 \tag{7.67}$$

для всех x, причем $y_0 > 0$.

В дальнейшем будем считать

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},\qquad k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}. \tag{7.68}$$

Относительно кривой Г, являющейся частью границы области D, сделаем следующие предположения: 1) функции $x(s)$, $y(s)$, дающие параметрическое уравнение кривой Г, имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера в промежутке $0\leqslant s\leqslant l$, где l — длина кривой Г; 2) в точках A и B кривая Г подходит к оси x в перпендикулярном направлении.

Координаты переменной точки на кривой Г будем обозначать через (ξ, η).

Рассмотрим интеграл

$$w(x, y)=\int_0^l \mu(s)\, A_s[q_1(\xi, \eta; x, y)]\, ds, \tag{7.69}$$

где $\mu(s)$ — непрерывная функция в промежутке $0\leqslant s\leqslant l$ и

$$A_s[\ ]=\eta^m\frac{d\eta}{ds}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{d\xi}{ds}\frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{7.70}$$

Интеграл (7.69) называется *потенциалом двойного слоя* с плотностью $\mu(s)$. Очевидно, что $w(x, y)$ есть регулярное решение уравнения (7.63) в любой области, лежащей в верхней полуплоскости, не имеющей общих точек ни с кривой Г, ни с осью x. Как и в случае теории логарифмического потенциала, можно показать существование потенциала двойного слоя (7.69) в точках кривой Г.

Теорема 5.3. *Потенциал двойного слоя $w(x, y)$ имеет пределы при стремлении (x, y) к точке $(\xi(s), \eta(s))\in\Gamma$ извне или изнутри, причем эти пределы различны. Если предел значений $w(x, y)$ изнутри обозначить через w_i, а предел извне — через w_e, то имеют место формулы*

$$\left.\begin{aligned} w_i(s)&=-\frac{1}{2}\mu(s)+w_0(s),\\ w_e(s)&=\frac{1}{2}\mu(s)+w_0(s), \end{aligned}\right\} \tag{7.71}$$

где

$$w_0(s)=\int_0^l \mu(t)\,A_t\,[q_1(\xi(t),\ \eta(t);\ \xi(s),\ \eta(s))]\,dt=$$
$$=\int_0^l K(s,\ t)\,\mu(t)\,dt. \tag{7.72}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$v(x,\ y)=\int_0^l \rho(t)\,q_1(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\,dt, \tag{7.73}$$

где $\rho(t)$ — непрерывная функция в $(0,\ l)$, обращающаяся на концах кривой Γ в нуль, как η^m. Интеграл (7.73) будем называть *потенциалом простого слоя* с плотностью $\rho(t)$. Потенциал простого слоя (7.73) определен во всей верхней полуплоскости и остается непрерывным при переходе через кривую Γ. Потенциал простого слоя (7.73) есть регулярное решение уравнения (7.63) в любой области, лежащей в верхней полуплоскости, не имеющей общих точек ни с кривой Γ, ни с осью x, и при беспредельном удалении точки $(x,\ y)$ стремится к нулю.

Возьмем на кривой Γ произвольную точку $N(s)$ и проведем в этой точке конормаль (см. стр. 156). Рассмотрим на этой конормали какую-нибудь точку $M(x,\ y)$, не лежащую на кривой Γ, и найдем конормальную производную от потенциала простого слоя (7.73):

$$A_s\,[v(x,\ y)]=\int_0^l \rho(t)\,A_s\,[q_1(\xi,\ \eta;\ x,\ y)]\,dt. \tag{7.74}$$

Интеграл (7.74) существует и в том случае, когда $M(x,y)$ совпадает с точкой $N(s)$.

Теорема 5.4. *Для непрерывной плотности $\rho(t)$ имеют место следующие формулы:*

$$\left.\begin{aligned} A_s\,[v(x,\ y)]_i &= \frac{1}{2}\rho(s)+A_s\,[v(x,\ y)]_0,\\ A_s\,[v(x,\ y)]_e &= -\frac{1}{2}\rho(s)+A_s[\,v(x,\ y)]_0, \end{aligned}\right\} \tag{7.75}$$

где

$$A_s[v(x, y)]_0 = \int_0^l \rho(t) A_s[q_1(\xi(t), \eta(t); \xi(s), \eta(s))]\,dt = \int_0^l K(t, s)\rho(t)\,dt. \tag{7.76}$$

4. Функция Грина оператора $E(u)$. *Функцией Грина* уравнения (7.63) *для задачи* N называется функция $G(x, y; x_0, y_0)$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) внутри области D, кроме точки (x_0, y_0), эта функция есть регулярное решение уравнения (7.63); 2) она удовлетворяет краевым условиям

$$G(x, y; x_0, y_0)|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0; \tag{7.77}$$

3) она может быть представлена в виде

$$G(x, y; x_0, y_0) = q_1(x, y; x_0, y_0) + g(x, y; x_0, y_0), \tag{7.78}$$

где $g(x, y; x_0, y_0)$ — регулярное решение уравнения (7.63) везде внутри D.

В случае «нормальной» области D_0, ограниченной отрезком $[0, 1]$ оси x и «нормальной» кривой:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4} \qquad (y \geqslant 0),$$

функция Грина выписывается в явном виде:

$$G_0(x, y; x_0, y_0) = q_1(x, y; x_0, y_0) - (4R^2)^{-\beta} q_1\left(x - \frac{1}{2}, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0\right), \tag{7.79}$$

где

$$R^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y_0^{m+2}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{4R^2},$$

$$\bar{y}_0^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y_0^{\frac{m+2}{2}}}{4R^2}.$$

Для произвольной области D регулярную часть функции Грина ищем в виде потенциала двойного слоя:

$$g(x, y; x_0, y_0) = \int_0^l \mu(t; x_0, y_0) A_t[q_1(\xi, \eta; x, y)]\,dt. \tag{7.80}$$

Принимая во внимание первую из формул (7.71) и краевое условие (7.77), получим интегральное уравнение для плотности $\mu(s;\ x_0,\ y_0)$:

$$\mu(s;\ x_0,\ y_0)-2\int_0^l \mu(t;\ x_0,\ y_0)\,K(s,\ t)\,dt = \\ =2q_1(\xi(s),\ \eta(s);\ x_0,\ y_0). \qquad (7.81)$$

Ядро $K(s,\ t)$ имеет слабую особенность, и $\lambda=2$ не является характеристическим числом. Обозначим через $\Gamma(s,\ t;\ \lambda)$ резольвенту *) ядра $K(s,\ t)$. Тогда решение уравнения (7.81) можно записать в виде

$$\mu(s;\ x_0,\ y_0)=2q_1(\xi(s),\ \eta(s);\ x_0,\ y_0)+ \\ +4\int_0^l \Gamma(s,\ t;\ 2)\,q_1(\xi,\ \eta;\ x_0,\ y_0)\,dt. \qquad (7.82)$$

Подставляя (7.82) в (7.80), получим:

$$g(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=2\int_0^l q_1(\xi,\ \eta;\ x_0,\ y_0)\,A_t^{*}[q_1(\xi,\ \eta;\ x,\ y)]\,dt+ \\ +4\int_0^l\int_0^l A_t[q_1(\xi(t),\ \eta(t);\ x,\ y)]\,\Gamma(s,\ t;\ 2)\,q_1(\xi(s),\ \eta(s);\ x_0,\ y_0)\,dt\,ds. \qquad (7.83)$$

Функция Грина $G(x,y;\ x_0,\ y_0)$ позволяет дать представление решения задачи N уравнения (7.63), а именно:

$$u(x_0,y_0)=-\int_0^1 \nu(x)\,G(x,\ 0;\ x_0,y_0)\,dx- \\ -\int_0^l \varphi(s)\,A_s[G(\xi,\ \eta;\ x_0,\ y_0)]\,ds. \qquad (7.84)$$

Подробное исследование формулы (7.84) показывает, что для кривых Γ, удовлетворяющих условиям 1) и 2) п. 3, она является решением задачи N уравнения (7.63), если $\varphi(s)$ —

---

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, гл. I, п. 5, 1951.

непрерывная функция при $0 \leqslant s \leqslant l$, а функция $\nu(x)$ — непрерывная при $0 < x < 1$, при $x \to 0$ или $x \to 1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше, чем $1 - 2\beta$.

Аналогично строится теория потенциала, если использовать второе фундаментальное решение $q_2(x, y;\ x_0, y_0)$ уравнения (7.63).

Функция Грина уравнения (7.63) для задачи Дирихле в случае «нормальной» области имеет вид

$$G_0(x, y;\ x_0, y_0) = \\ = q_2(x, y;\ x_0, y_0) - (4R^2)^{-\beta} q_2\left(x - \frac{1}{2},\ y;\ \bar{x}_0,\ \bar{y}_0\right), \quad (7.85)$$

и решение задачи Дирихле выражается формулой

$$u(x_0, y_0) = \\ = \int_0^1 \tau(x) \frac{\partial G_0(x, 0;\ x_0, y_0)}{\partial y} dx - \int_0^l \varphi(s) A_s[G_0(\xi, \eta;\ x_0, y_0)]\, ds. \quad (7.86)$$

Для произвольной области D построение функции Грина уравнения (7.63) для задачи Дирихле производится так же, как и для задачи N.

5. Рассмотрим теперь уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = 0 \quad (7.87)$$

в области D, расположенной в полуплоскости $y > 0$. Коэффициенты a, b, c — аналитические функции, $c \leqslant 0$, $m > 0$. Граница S области D состоит из конечного числа отрезков оси x и конечного числа кривых Γ_j, лежащих в полуплоскости $y > 0$. Совокупность кривых Γ_j обозначим через Γ. Каждая из кривых Γ_j такова, что угол, составленный касательной к ней с осью x, удовлетворяет условию Гёльдера. Обозначим через $\{P_i\}$ множество концов Γ, лежащих на оси x.

Постановка краевых задач для уравнения (7.87) зависит от m и поведения коэффициента $b(x, y)$ при $y \to 0$. В одних случаях граничные условия задаются на всей границе S области D, в других — часть границы, совпадающей с линией вырождения, частично или полностью освобождается от граничных условий. Это объясняется тем, что решение $u(x, y)$ уравнения (7.87) и его производная u_y могут, вообще говоря, обращаться в бесконечность на линии вырождения. Так, если в окрестности прямой $y=0$ не все решения уравнения (7.87) остаются ограниченными при $y \to 0$, то задача Дирихле, вообще говоря, не имеет решения. В этих случаях оказывается разрешимой следующая *задача E*: найти регулярное в области D решение уравнения (7.87), остающееся ограниченным при $y \to 0$ и принимающее заданные непрерывные значения φ лишь на Г.

Теорема 5.5 [14]. *Если $m<1$, то всегда существует решение задачи Дирихле, а задача E неопределенна.*

Если $m=1$ и $b(x, 0)<1$, то всегда существует решение задачи Дирихле, а задача E неопределенна. Если же $m=1$ и $b(x, 0) \geqslant 1$, то задача Дирихле, вообще говоря, не имеет решения, а задача E всегда имеет единственное решение.

Если $1<m<2$ и $b(x, 0) \leqslant 0$, то всегда существует решение задачи Дирихле, а задача E неопределенна. Если же $1<m<2$ и $b(x, 0)>0$, то задача Дирихле, вообще говоря, не имеет решения, а задача E всегда имеет единственное решение.

Если $m \geqslant 2$ и $b(x, 0)<0$, то задача Дирихле всегда имеет решение, а задача E неопределенна. Если же $m \geqslant 2$ и $b(x, 0) \geqslant 0$, то задача Дирихле не всегда имеет решение, а задача E всегда имеет единственное решение.

Пусть теперь на S задаются граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}+A(x, y) u=\varphi(x, y) \quad \text{на } \Gamma, \tag{7.88}$$

$$u(x, 0)=\tau(x) \quad \text{на } S \setminus \Gamma \setminus \{P_i\}. \tag{7.89}$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ — производная по некоторому направлению γ, образующему острый угол с внутренней нормалью n к границе Г. Функции A, φ и компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ удовлетворяют на $\Gamma+\{P_i\}$ условиям Гёльдера, $\tau(x)$ непрерывна на $S \setminus \Gamma$, кроме того, $A \leqslant 0$ и $\max\limits_{Q \in \Gamma+\{P_i\}} A(Q)+\max\limits_{Q_1 \in \bar{D}} C(Q_1)<0$.

Если в уравнении (7.87) m и $b(x, y)$ таковы, что для области D всегда разрешима задача Дирихле (см. теорему 5.5), то имеют место следующие теоремы [6]:

Теорема 5.6. *В области D существует ограниченное решение уравнения* (7.87), *непрерывное в $\overline{D}\setminus\{P_i\}$ и удовлетворяющее условиям* (7.88) и (7.89).

Теорема 5.7. *Если во всех точках $\{P_i\}$ направление γ составляет тупой угол с осью y, то существует единственное непрерывное в $\overline{D}$ решение уравнения* (7.87), *удовлетворяющее условиям* (7.88) *и* (7.89).

Пусть в уравнении (7.87) m и $b(x, y)$ удовлетворяют одному из следующих условий (см. теорему 5.5): 1) $m=1$ и $b(x, 0)\geqslant 1$; 2) $1<m<2$ и $b(x, 0)>0$; 3) $m\geqslant 2$ и $b(x, 0)\geqslant 0$.

В этих случаях на части границы области D, совпадающей с осью x, никаких граничных условий не задается.

Теорема 5.8 [17]. *В области D существует ограниченное решение уравнения* (7.87), *удовлетворяющее условию* (7.88).

Теорема 5.9. *Если во всех точках $\{P_i\}$ направление γ составляет с осью y острый или прямой угол, то существует единственное ограниченное решение уравнения* (7.87) *в области D, удовлетворяющее условию* (7.88).

§ 6. Применение функциональных методов исследования эллиптических уравнений, вырождающихся на части границы

1. Общие замечания. Рассмотрим эллиптическое уравнение, вырождающееся на части границы области:

$$Lu\equiv\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\\+c(x)u=f(x), \qquad (7.90)$$

$x=(x_1, \ldots, x_n)$. Уравнение (7.90) рассматривается в конечной области $D\subset(x_n>0)$, часть границы Γ_0 которой лежит в плоскости $x_n=0$, а остальная часть границы Γ_1 лежит в полупространстве $x_n>0$; $\Gamma_1\cup\Gamma_0=\Gamma$. Предположим, что функции $a_{ik}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$ и что для любой точки $x \in D$ и любых чисел ξ_i, $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 > 0$,

$$F(x, \bar{\xi}) \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k > 0, \tag{7.91}$$

а для $x^0 \in \Gamma_0$

$$F(x^0, \bar{\xi}) \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x^0)\xi_i\xi_k \geqslant 0, \tag{7.92}$$

причем ранг последней квадратичной формы $\leqslant n-1$.

При исследовании функциональными методами краевых задач для уравнения (7.90) большое значение имеют теоремы вложения для вырождающихся на границе области метрик [8]. Эти теоремы являются обобщением известных теорем вложения С. Л. Соболева [18] для невырождающихся метрик.

Пусть $\mathring{\Omega}$ — множество всех непрерывных в D функций, имеющих ограниченные кусочно непрерывные первые производные и обращающихся в нуль в некоторой (своей для каждой функции) граничной полоске области D. Через Gu обозначим градиент функции $u(x)$: $Gu = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, а многообразие, составленное из элементов Gu, где $u \in \mathring{\Omega}$, — через $\mathring{R}$. Введем в $\mathring{R}$ скалярное произведение по формуле

$$\{Gu, Gv\} = \int\limits_D \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx. \tag{7.93}$$

Пусть $\dot{R}$ — замыкание $\mathring{R}$ в метрике (7.93). В силу (7.91) это замыкание также состоит из градиентов Gu функций u, имеющих в D обобщенные первые производные и обращающихся в среднем в нуль на любой части границы $\Gamma_1^\delta = \Gamma_1 \cap (x_n > \delta)$, $\delta > 0$. Множество всех функций $u(x)$, полученных в результате замыкания $\mathring{R}$, обозначим через $\dot{\Omega}$. Очевидно, $G\dot{\Omega} = \dot{R}$ и, следовательно, $\dot{\Omega}$ является областью определения оператора градиента G.

2. Первая краевая задача. Будем предполагать, что в уравнении (7.90) коэффициенты $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ непрерывно дифференцируемы в $D \cap (x_n \geqslant \delta)$, где $\delta > 0$ — любое число, а $c(x)$ непрерывна в $D \cap (x_n \geqslant \delta)$. Предположим также, что выполнены неравенства

$$0 \leqslant x_n^\alpha \Big(\sum_{i=1}^n l_i(x)\xi_i \Big)^2 \leqslant c_1^2 F(x, \xi)\,{}^{*)} \tag{7.94}$$

и

$$c^2 x_n^\alpha \leqslant a_{nn}(x) \leqslant C^2 x_n^\alpha. \tag{7.95}$$

В случае $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ первая (однородная) краевая задача состоит в нахождении решения уравнения (7.90), обращающегося в нуль на всей границе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ области D.

В случае $\alpha \geqslant 1$ постановка первой краевой задачи зависит от коэффициента $b_n(x)$.

Если в окрестности Γ_0

$$b_n(x) \geqslant -c^2 x_n^{\alpha-1} |\ln|\ln x_n||^{-\varepsilon_1} \quad \text{при } \alpha > 1 \quad (\varepsilon_1 > 0) \tag{7.96}$$

или

$$b_n(x) \geqslant -c^2 |\ln x_n|^{-1} |\ln|\ln x_n||^{-\varepsilon_1} \quad \text{при } \alpha = 1,$$

то первая краевая задача состоит в нахождении решения уравнения (7.90), обращающегося в нуль на Γ_1; на Γ_0 никаких граничных условий не задается.

Под решением (обобщенным) первой краевой задачи мы будем понимать такую функцию $u(x) \in \dot{\Omega}(D)$, что

$$[f, v] = -\{\mathfrak{G}u, \mathfrak{G}v\} - \Big[u, \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big] + \Big[\Big(c - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\Big) u, v\Big], \tag{7.97}$$

где $v(x)$ — любая функция из $\dot{\Omega}(D)$, обращающаяся в нуль вблизи Γ_0.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены неравенства* (7.94) *и* (7.95), *коэффициент* $b_n(x)$ *при* $\alpha \geqslant 1$ *удовлетворяет*

---

*) $l(x) = (l_i(x))$ — непрерывно дифференцируемое поле векторов $|l(x)| = 1$, $l_n(x) \geqslant k > 0$. Существование такого поля тесно связано с характеристическими направлениями уравнения (7.90) в точках $x^0 \in \Gamma_0$.

неравенству (7.96), *а при* $\alpha < 1$

$$b_n(x) \geqslant -c^2 x_n^{\alpha-1} \tag{7.96a}$$

в некоторой окрестности Γ_0. *Если*

$$c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \leqslant 0, \quad x \in D, \tag{7.98}$$

то первая краевая задача имеет единственное решение для любой правой части $f(x) \in L_D^2(\sigma^{-1})$, *где* $\sigma(x)$ — *достаточно гладкая функция,* $\sigma(x) > 0$ *для* x с $x_n > 0$ и

$$\sigma(x) = \begin{cases} O(x_n^{\alpha-2} \,|\ln x_n|^{-1-\varepsilon_0}) & \text{для } \alpha \neq 1, \\ O(x_n^{-1} \,|\ln x_n|^{-2-\varepsilon_0}) & \text{для } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\varepsilon_0 > 0). \tag{7.99}$$

Если в некоторой окрестности Γ_0

$$\left.\begin{aligned} &b_n(x) \leqslant -c^2 x_n^{\alpha-1} && \text{при } \alpha > 1, \\ \text{или} \quad &b_n(x) \leqslant -c^2 |\ln x_n|^{-1} && \text{при } \alpha = 1 \end{aligned}\right\} \tag{7.100}$$

и выполнены неравенства (7.94) и (7.95) при $\alpha \geqslant 1$, то первую краевую задачу определим с помощью перехода к сопряженному оператору.

Пусть

$$L^*v \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left(c - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right) v = g(x). \tag{7.101}$$

В сопряженном уравнении (7.101) коэффициент $\tilde{b}_n(x) = -b_n(x) \geqslant c^2 x_n^{\alpha-1}$ (или $\geqslant c^2 |\ln x_n|^{-1}$) в окрестности Γ_0, и, значит, первая краевая задача для уравнения (7.101) ставится так, как указано в начале настоящего пункта.

Под первой краевой задачей для уравнения (7.90) в случае выполнения неравенств (7.94), (7.95) и условий (7.100) мы будем понимать ту задачу, которой соответствует оператор L, сопряженный с оператором первой краевой задачи для уравнения (7.101) с однородными граничными условиями, Теорема 6.2. *Если выполнены неравенства* (7.94) *и* (7.95), *коэффициент* $b_n(x)$ *при* $\alpha \geqslant 1$ *удовлетворяет условию* (7.100) *и имеет место неравенство* (7.98), *то первая краевая задача с однородными граничными условиями (в указанном выше смысле) имеет единственное решение при любой правой части* $f(x) \in L_D^2(\sigma^{-1})$.

Если коэффициент $b_n(x)$ непрерывен в $\bar{D}$ и $b_n(x^0) < 0$ для $x^0 \in \bar{\Gamma}_0$, $\alpha \geqslant 1$, то при постановке первой краевой задачи на Γ_0 следует задавать граничное условие $u|_{\Gamma_0} = 0$, т. е. в этом случае первая краевая задача ставится так же, как в случае $\alpha < 1$.

Теорема 6.3. *Если:* 1) *выполнены неравенства* (7.94), (7.95), *причем для некоторого* β *имеет место*

$$x_n^\beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant c^2 F(x, \xi); \qquad (7.102)$$

2) *в некоторой окрестности* Γ_0 *коэффициент* $b_n(x)$ *при* $\alpha \geqslant 1$ *удовлетворяет неравенству* (7.96) *(или* $b_n(x^0) < 0$ *для* $x^0 \in \Gamma_0$, $\alpha \geqslant 1$), *а при* $\alpha < 1$ $b_n(x) \geqslant -c^2 x_n^{\alpha-1}$ *и* $c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = O(\sigma(x))$, *то для первой краевой задачи для уравнений* (7.90) *и* (7.101) *имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма. При этом всегда оператор* L *полуограничен в следующем смысле:*

$$[Lu, u] \leqslant (-1 + \varepsilon)\{Gu, Gu\} + M[\sigma u, u] \qquad (\varepsilon > 0),$$

а задача на собственные значения $Lu = \lambda\sigma u$ *при граничных условиях первой краевой задачи приводит к дискретному и конечнократному спектру с единственной возможной точкой сгущения на бесконечности. Резольвента* $(L - \lambda\sigma E)^{-1}$ *для регулярных значений* λ *вполне непрерывна.*

Для самосопряженного оператора L имеет место

Теорема 6.3[1] [16]. *Если* $c^2 x_n^\alpha \leqslant a_{nn}(x) \leqslant C^2 x_n^\alpha$ *и* $\alpha \geqslant 2$, *то спектр оператора* $\bar{L}$ *не дискретен.*

Соответствующие теоремы для первой краевой задачи для однородного уравнения $Lu = 0$ при неоднородных граничных условиях доказываются с помощью метода прямых разложений (см. [9]).

Пусть $\tilde{\Omega}$ — множество всех непрерывных в D функций, имеющих ограниченные кусочно непрерывные первые производные. На множестве $\tilde{R}$ градиентов Gu введем скалярное произведение по формуле

$$\{Gu, Gv\}_\gamma = \int\limits_D \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \gamma(x)uv\right]dx, \qquad (7.103)$$

где $\gamma(x) \geqslant 0$ — непрерывная функция, отличная от нуля только в окрестности некоторой внутренней точки $x' \in D$. Замыкание $\tilde{R}$ в метрике (7.103) обозначим через R. Очевидно, R также состоит из градиентов Gu функций $u(x)$ (образующих множество Ω), имеющих в D обобщенные первые производные.

3. Вторая краевая задача. Пусть коэффициенты $a_{ik}(x)$ непрерывно дифференцируемы в $\bar{D}$, $b_i(x)$ непрерывны в $\bar{D}$, а $c(x)$ ограничена в $D \cap (x_n > \delta)$.

Пусть при $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство (7.94). В этом случае вторая краевая задача ставится следующим образом: ищется решение уравнения (7.90) в области D, удовлетворяющее на всей границе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ краевому условию

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_i) + A(s)u = \varphi(s), \qquad (7.104)$$

где n — внешняя нормаль, $A(s)$ — ограниченная функция.

Решением (обобщенным) второй краевой задачи (7.90), (7.104) назовем функцию $u(x) \in \Omega$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$[f, v] - (\varphi, v)_\Gamma = -\{Gu, Gv\}_\gamma - \left[u, \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] + \\ + \left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\cos(n, x_i) - A\right)u, v\right)_\Gamma + \\ + \left[\left(c - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \gamma(x)\right)u, v\right] \qquad (7.105)$$

при любой функции $v(x)$ из некоторого подмножества $\Omega' \subset \Omega$.

Теорема 6.4. *Пусть при некотором* α, $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$x_n^\alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leqslant cF(x, \xi), \tag{7.106}$$

и пусть выполнены следующие неравенства для коэффициентов уравнения (7.90) *и краевого условия* (7.104):

$$c(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} + \gamma(x) \leqslant 0 \qquad (x \in D), \tag{7.107}$$

$$c(x) = O(\sigma_1), \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} = O(\sigma_1)\,^{*)}, \tag{7.107a}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i(s) \cos(n, x_i) - A(s) \leqslant 0 \quad \text{для } s \in \Gamma. \tag{7.108}$$

Тогда вторая краевая задача (7.90), (7.104) *имеет единственное решение для любых правых частей* $f(x) \in L_D^2(\sigma_1^{-1})$, $\varphi(s) \in L_\Gamma^2$.

Если условия (7.107) и (7.108) не выполнены, то для второй краевой задачи для уравнений (7.90) и (7.101) имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма. Оператор Lu, соответствующий второй краевой задаче при $\varphi(s) = 0$, полуограничен:

$$[Lu, u] \leqslant (-1 + \varepsilon)\{Gu, Gu\}_\gamma + M[\sigma_1 u, u],$$

---

*) $\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) > 0$ при $x_n > 0$, причем:

1) в окрестности внутренних точек Γ_0 и вблизи точек $x_0 \in \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1$, в которых $l(x_0)$ направлен строго внутрь области D, $\sigma_1(x) = \sigma(x)$ при $\alpha \geqslant 1$, $\sigma_1(x) = O(x_n^{-1} |\ln x_n|^{-1-\varepsilon_0})$ при $\alpha < 1$;

2) вблизи остальных точек $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1$ в случае выполнения неравенства (7.102)

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} O(x_n^{\alpha-2} |\ln x_n|^{-1-\varepsilon} d^{\beta-\alpha}) & \text{при } \alpha > 1, \\ O(x_n^{-1} |\ln x_n|^{-2-\varepsilon} d^{\beta-1}) & \text{при } \alpha = 1, \\ O(x_n^{-1} |\ln x_n|^{-1-\varepsilon} d^{\rho}) & \text{при } \alpha < 1, \end{cases}$$

где d — расстояние от точки x до $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1'$, $\rho = \beta - 1$ при $\beta > 1$, $\rho = 0$ при $\beta < 1$; при $\beta = 1$ d^ρ следует заменить на $|\ln d|^{-1}$.

его спектр (относительно веса σ_1) дискретный и конечнократный, а резольвента $(L-\lambda\sigma_1 E)^{-1}$ для регулярных значений λ вполне непрерывна.

В случае $\alpha \geqslant 1$ постановка второй краевой задачи зависит от коэффициента $b_n(x)$. Если $b_n(x)$ удовлетворяет условию (7.96), то на Γ_1 задается граничное условие (7.104), *на Γ_0 никаких условий не задается.*

Обозначим через $\tilde{\Omega}^0$ множество тех функций $v(x) \in \Omega$, каждая из которых обращается в нуль в некоторой окрестности Γ_0, а через Ω_1 — его замыкание в метрике $\{\ \}_\gamma$.

Под решением (обобщенным) второй краевой задачи для уравнения (7.90) в случае выполнения условия (7.96) мы будем понимать такую функцию $u \in \Omega$, что для любой функции $v \in \tilde{\Omega}^0$ выполнено интегральное тождество

$$[f, v]-(\varphi, v)_{\Gamma_1} = -\{Gu, Gv\}_\gamma + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\right] - \\ -(Au, v)_{\Gamma_1} + [(c+\gamma)u, v]. \qquad (7.109)$$

Теорема 6.5. *Пусть*: 1) *выполнены неравенства* (7.94) *и* (7.95) *при $\alpha \geqslant 1$ и для некоторого β выполнено неравенство* (7.102), *причем в окрестности точек $x_0 \in \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$, в которых векторы $l(x)$ не направлены строго внутрь области D, соотношение* (7.102) *справедливо и при $\beta=\alpha$*;

2) *для $b_n(x)$ в некоторой окрестности Γ_0 имеет место соотношение* (7.96);

3) *справедливы неравенства* (7.107) *и*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i(s)\cos(n, x_i) - A(s) \leqslant 0 \quad \text{для } s \in \Gamma_1. \qquad (7.108\text{a})$$

Тогда вторая краевая задача имеет единственное решение для любых $f(x) \in L_D^2(\sigma_1^{-1})$ и $\varphi(s) \in L_{\Gamma_1}^2(\rho^{-1})$, где вес $\rho(x) > 0$ всюду, за исключением, быть может, точек множества $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$.

Если в некоторой окрестности Γ_0

$$\left.\begin{array}{ll} b_n(x) \leqslant -c^2 x_n^{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1 \\ b_n(x) \leqslant -c^2 |\ln x_n|^{-1} & \text{при } \alpha = 1 \end{array}\right\} \qquad (7.110)$$

или

и выполнено условие 1) теоремы 6.5, то вторую краевую задачу для уравнения (7.90) с однородным граничным условием определим как задачу, сопряженную со второй краевой задачей для уравнения (7.101) при однородном граничном условии.

Теорема 6.6. *Если выполнены условия* 1) *и* 3) *теоремы* 6.5 *и* $b_n(x)$ *при* $\alpha \geqslant 1$ *удовлетворяет условию* (7.110), *то вторая краевая задача для уравнения* (7.90) *с* $\varphi \equiv 0$ *имеет единственное решение для любой правой части* $f(x) \in L_D^2(\sigma_1^{-1})$.

Если коэффициенты уравнения (7.90) гладкие и $f(x) \in C^1$, $b_n(x^0) < 0$ для $x^0 \in \Gamma_0 (\alpha \geqslant 1)$, то при постановке второй краевой задачи на Γ_0 следует задавать граничное условие $u|_{\Gamma_0} = 0$ (в случае задачи с однородными краевыми условиями).

Разрешимость второй краевой задачи для уравнения (7.90) в случае, когда $b_n(x)$ при $\alpha \geqslant 1$ удовлетворяет условию (7.110), при неоднородных краевых условиях устанавливается методом прямых разложений [9].

Теорема 6.7. *Пусть выполнено условие* 1) *теоремы* 6.5 *и*

$$c(x) = O(\sigma_1), \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = O(\sigma_1) \qquad (x \in D),$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cos(n, x_i) = O(\bar{\rho}), \quad A(s) = O(\bar{\rho})\,^{*)} \qquad (s \in \Gamma_1).$$

Тогда относительно вторых краевых задач для уравнения (7.90) *и сопряженного с ним уравнения* (7.101) *имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма. Оператор* L, *соответствующий второй краевой задаче при* $\varphi \equiv 0$, *полуограничен*:

$$[Lu, u] \leqslant (-1 + \varepsilon) \{Gu, Gu\}_\gamma + M[\sigma_1 u, u].$$

Задача о собственных значениях $Lu = \lambda\sigma_1 u$ приводит к дискретному и конечнократному спектру. Резольвента

---

*) Вес $\bar{\rho}(x) > 0$ всюду, за исключением, быть может, точек множества $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1$.

$(L-\lambda\sigma_1 E)^{-1}$ для регулярных значений λ вполне непрерывна.

Если

$$a_{ik}(x) \in C^4(D'),$$
$$b_i(x) \in C^3(D'),$$

а

$$f(x) \in C^1(D'),$$

где D' — любая внутренняя подобласть области D, то обобщенные решения первой и второй краевых задач имеют непрерывные производные до второго порядка внутри области D. Краевым условиям решения удовлетворяют в среднем, в смысле, указанном С. Л. Соболевым [18].

ГЛАВА VIII

УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Важнейшие уравнения смешанного типа

Рассмотрим в некоторой области D плоскости (x, y) квазилинейное уравнение второго порядка

$$A(x, y) z_{xx} + 2B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} = \\ = f(x, y, z, z_x, z_y) \quad (8.1)$$

с вещественными коэффициентами A, B, C и положим, что дискриминант $\delta(x, y) = B^2 - AC$ квадратичной формы $F = Ady^2 - 2B\,dxdy + C\,dx^2$ обращается в нуль вдоль некоторой кривой Γ, расположенной внутри области D. Условимся называть такую дугу Γ *параболической* линией уравнения (8.1) или *линией вырождения* типа этого уравнения. Остановимся сначала на наиболее простом и вместе с тем важном случае степенного вырождения, когда в окрестности σ линии Γ функция $\delta(x, y)$ представляется в виде $\delta = H^n(x, y)\,G(x, y)$, где $G(x, y)$ конечна и отлична от нуля всюду в σ, $H(x, y) = 0$ на линии Γ, H_x и H_y не обращаются одновременно в нуль на Γ, а n — нечетное целое положительное число *). При этом следует различать два возможных варианта расположения линии Γ в поле характеристик уравнения (8.1). А именно, будем говорить, что (8.1) является уравнением с параболическим вырождением *первого рода*, если ни в одной точке линии Γ касательная не совпадает с направлением характе-

*) Случай, когда $n = 2m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ или когда Γ принадлежит границе области D, приводит к вырождающимся уравнениям эллиптико-параболического или гиперболо-параболического типа. Этим уравнениям посвящена гл. VII настоящей книги.

ристик $F=0$ уравнения (8.1) (т. е. если $F \neq 0$ всюду вдоль Г). Наоборот, к уравнениям с параболическим вырождением *второго рода* мы отнесем (8.1) в том случае, когда Г совпадает с одной из характеристик этого уравнения (т. е. когда $F=0$ на Г). Так как по предположению дискриминант $\delta(x, y)$ меняет свой знак при переходе через Г, то при $n=2m+1$ ($m=0, 1, 2, \ldots$) уравнение (8.1) будет эллиптическим по одну сторону от дуги Г и гиперболическим по другую, в силу чего (8.1) называется в этом случае *уравнением смешанного эллиптико-гиперболического типа первого* или *второго рода*. Важным примером таких уравнений служит известное уравнение Трикоми [51]:

$$\mathfrak{T}_1[z]=yz_{xx}+z_{yy}=0, \tag{8.2}$$

отвечающее значениям $A=y$, $B=0$, $C=1$, $f\equiv 0$. Для него дискриминант $\delta(x, y)=-y$ обращается в нуль вдоль оси Ox, выше которой (при $y>0$) (8.2) является уравнением эллиптического типа, а ниже (при $y<0$) его тип становится гиперболическим. Как показали исследования Ф. Трикоми [51] и М. Чибрарио [80], в общем случае (8.1) также удается добиться того, чтобы параболическая линия Г стала одной из координатных осей. А именно, было установлено, что при некоторых условиях гладкости коэффициентов A, B и C путем неособого вещественного преобразования независимых переменных уравнение (8.1) в окрестности линии Г может быть приведено к канонической форме $y^n z_{xx}+z_{yy}=\varphi(x, y, z, z_x, z_y)$, если (8.1) является смешанным уравнением первого рода, и к виду $x^n z_{xx}+z_{yy}=\varphi$, когда (8.1) принадлежит ко второму роду. Особого внимания заслуживают линейные уравнения рассмотренных видов:

$$y^n z_{xx}+z_{yy}+az_x+bz_y+cz+d=0, \tag{8.3а}$$

$$x^n z_{xx}+z_{yy}+az_x+bz_y+cz+d=0. \tag{8.3б}$$

В свою очередь при изучении таких уравнений важную роль играют их прототипы:

$$\mathfrak{T}_n[z]=y^n z_{xx}+z_{yy}=0, \tag{8.4а}$$

$$G_n[z]=x^n z_{xx}+z_{yy}=0, \tag{8.4б}$$

получаемые из (8.3) путем отбрасывания младших членов [81], [85], [88].

Наряду с перечисленными выше, представляют интерес также уравнения с нецелыми значениями показателя n, а именно уравнения (8.1) со степенным вырождением произвольного порядка $\alpha > 0$, для которых функция $\delta(x, y)$ имеет вид $\delta(x, y) = \operatorname{sgn} H(x, y) \, |H(x, y)|^{\alpha} G(x, y)$, где α — вещественное положительное число, а $\operatorname{sgn} y = 1, 0, -1$ при $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$. Подобно (8.4), основными прототипами здесь служат [20], [22], [31]:

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^{\alpha} z_{xx} + z_{yy} = 0, \tag{8.5а}$$

$$\operatorname{sgn} x \cdot |x|^{\alpha} z_{xx} + z_{yy} = 0. \tag{8.5б}$$

В частности, при $\alpha = 0$ из (8.5) возникает более простая модель таких уравнений — уравнение смешанного типа с «постоянными» (точнее, с кусочно постоянными) коэффициентами [9], [38], [69], [77]:

$$L_0[z] = z_{xx} + \operatorname{sgn} y z_{yy} = 0. \tag{8.6}$$

Началом нового этапа в развитии теории уравнений смешанного типа явилась известная работа Ф. И. Франкля [56]. В ней Ф. И. Франкль впервые обнаруживает важные приложения теории уравнений смешанного типа к проблемам трансзвуковой газовой динамики, а затем в ряде публикаций доказывает, что к смешанным краевым задачам приводятся следующие проблемы:

1) теория околозвуковых течений со свободными границами (истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками при максимальном расходе газа) [61], [64];

2) прямая и обратные задачи, связанные: а) с критическими течениями в соплах Лаваля [57], [60], [73]; б) с обтеканием крылового профиля плоскопараллельным потоком газа при числе Маха, на бесконечности равном единице [62], [63], [72];

3) теория сверхзвуковых течений с местной дозвуковой областью (задача набегания сверхзвуковой струи на клин в случае, когда перед ним образуется зона дозвуковых скоростей, причем головная ударная волна проходит через острие клина или отсоединена от него) [56], [58];

4) прямые и обратные задачи, связанные с образованием в дозвуковых потоках местных сверхзвуковых областей (дозвуковые течения внутри сопел Лаваля со сверхзвуковыми зонами на стенках сопла; обтекание дозвуковым потоком про-

филя крыла при появлении на нем местных сверхзвуковых областей со скачками уплотнения) [35], [67]—[69], [74].

Наряду с этим было также установлено, что смешанный эллиптико-гиперболический характер имеют: уравнение пластического равновесия при плоском напряженном состоянии [50]; уравнения движения воды в открытом русле, когда скорость течения становится выше скорости распространения поверхностных волн [66]; уравнения безмоментного напряженного равновесия оболочек, обладающих кривизной переменного знака [14]; уравнения, описывающие магнитогидродинамические течения с переходом через скорость звука и скорость Альфвена [37]; характеристическое уравнение бесконечно малых изгибаний поверхностей, гауссова кривизна которых меняет знак [5], [25].

Важными для практики результатами новой теории интересуются специалисты в области паровых турбин [23], ракетной техники и т. д.

Из перечисленных приложений следует особо выделить уравнение Моленброка — Чаплыгина, играющее первостепенную роль в газовой динамике околозвуковых скоростей. Это уравнение для функции тока имеет вид [76]

$$L[z] = K(y)\,z_{xx} + z_{yy} = 0, \tag{8.7}$$

где

$$K = \frac{1-(1+2\beta)\tau}{(1-\tau)^{1+2\beta}}, \quad \beta = \frac{1}{\varkappa - 1}, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v},$$

$$y = \int\limits_{\tau}^{\tau^*} \frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}\,d\tau, \tag{8.8}$$

причем $\tau = v^2/v_{\max}^2$ — безразмерная скорость потока, а значение $\tau^* = 1/(1+2\beta)$ отвечает звуковой скорости. В окрестности линии перехода $y = 0$ его коэффициент $K(y)$ определяется степенным рядом

$$K(y) = k_1 y + k_2 y^2 + k_3 y^3 + \ldots \qquad (k_i = \mathrm{const}), \tag{8.9}$$

причем $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, а $K(0) = 0$. Заметим, что подстановка $\eta = \left[\frac{3}{2}\int\limits_0^y \sqrt{K}dy\right]^{2/3}$ преобразует уравнение (8.7) к каноническому виду (8.3а): $\eta z_{xx} + z_{\eta\eta} + b(\eta) z_\eta = 0$, где

$b(\eta)=\frac{d}{d\eta}\ln\sqrt{K/\eta}$. С другой стороны, полагая $u=(\eta/K)^{1/4}z$, получаем новую важную форму уравнения Чаплыгина:

$$\eta u_{xx}+u_{\eta\eta}+c(\eta)u=0,\quad c(\eta)=-\frac{1}{4}[b^2(\eta)+2b'(\eta)]. \tag{8.10}$$

Таким образом, наряду с главной частью — оператором Трикоми $\mathfrak{T}_1[z]$ — последние два уравнения содержат младшие члены $b(\eta)z_\eta$ и $c(\eta)u_z$ и, следовательно, являются смешанными уравнениями первого рода с показателем вырождения линии $\eta=0$, равным единице.

Особенно детально изучалось уравнение (8.10) в частных случаях $c(\eta)=c=\mathrm{const}$ $(c<0)$ [84] и $c(\eta)=-b^2\eta$ $(b=\mathrm{const})$ [27], [28]. В аналогичном направлении подвергалось обобщению и уравнение (8.6); так, в работах [17], [18], [46] рассматривается уравнение с «постоянными» коэффициентами $u_{xx}+\operatorname{sgn} y u_{yy}-u=0$ и другие модели, содержащие наряду с оператором (8.6) младшие члены. Важные приложения в проблемах газовой динамики и магнитогидродинамики нашли и смешанные уравнения второго рода. Так, например, прямые задачи теории сопла Лаваля и крылового профиля привели к необходимости изучать уравнение [70], [92]

$$z_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{K(y)}z_y\right]=0, \tag{8.11}$$

где $K(y)$ имеет то же значение, что и в (8.7). Нетрудно убедиться, что путем введения новых переменных уравнение (8.11) можно привести к канонической форме (8.3б) с дробным показателем вырождения. Например, главная часть, возникающая из (8.11) при $K(y)=y$, преобразуется подстановкой $\eta\doteq\operatorname{sgn} y\cdot y^2$ к виду

$$\operatorname{sgn}\eta\cdot|\eta|^{-\frac{1}{2}}z_{xx}+z_{\eta\eta}=0, \tag{8.12}$$

что равносильно уравнению (8.5б) с показателем $\alpha=\frac{1}{2}$.

Остановимся, наконец, на некоторых других современных направлениях в развитии теории уравнений смешанного типа. В этой связи следует отметить прежде всего работы [6], [29], [52], [82], авторы которых, идя по пути увеличения числа нулевых линий функций $\delta(x, y)$, изучают уравнения с двумя параллельными и перпендикулярными линиями параболичности (*линии параболичности с двойными точками*) *). Увеличению числа независимых переменных в уравнениях смешанного типа посвящена другая группа исследований [10], [13], [44], [45], [98]. Особое внимание при этом уделялось смешанным краевым задачам для трехмерного модельного уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+\operatorname{sgn} z u_{zz}=0, \tag{8.13}$$

меняющего свой тип при переходе через параболическую плоскость $z=0$. Уравнения высших порядков с параболическими линиями изучаются в работах [3], [26], [47]—[49], причем полная смешанная краевая задача рассмотрена детально пока лишь для уравнения четвертого порядка с кусочно постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\operatorname{sgn} y\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=0. \tag{8.14}$$

Наконец, отметим, что в настоящее время положено также начало изучению и систем дифференциальных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа [11], [36], [53], [83].

§ 2. Постановка смешанных краевых задач для уравнения С. А. Чаплыгина

При формулировке основных смешанных краевых задач будем исходить из *уравнения типа С. А. Чаплыгина* (8.7):

$$L[z]=K(y)z_{xx}+z_{yy}=0, \tag{8.15}$$

которое охватывает как частные случаи уравнения (8.2) и (8.4а), где $K(y)=y$ и $K(y)=y^n$ соответственно. Положим при этом, что $K(y)$ удовлетворяет условиям

$$yK(y)>0 \text{ при } y\neq 0,\ K(0)=0,\ K'(y)>0. \tag{8.16}$$

В полуплоскости $y<0$ уравнение (8.15) имеет вещественные характеристики, образующие два семейства кривых:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}, \tag{8.17а}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}. \tag{8.17б}$$

---

*) Следует заметить, что само уравнение С. А. Чаплыгина также имеет две параллельные линии перехода: звуковую линию и линию максимальной скорости [54].

Таким образом, через каждую точку $M(x_0, 0)$ оси Ox проходят две характеристики, которые, например, в случае уравнения (8.4а):

$$\mathfrak{T}_n[z] = y^n z_{xx} + z_{yy} = 0 \qquad (8.18)$$

(n — нечетное целое положительное число), сводятся к *параболам Нейля степени* $\frac{2}{n+2}$:

$$x - x_0 \pm \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = 0.$$

Приведем сначала перечень основных краевых задач, поставленных в настоящее время для уравнения (8.15) *). При этом, не желая загромождать здесь изложение большим числом деталей, мы лишь в дальнейшем (§§ 4 и 5) уточним те требования, которым следует подчинить граничные значения решений, чтобы обеспечить их существование и единственность. Пусть D — односвязная область плоскости (x, y), разделенная на две части D_1 $(y > 0)$ и D_2 $(y < 0)$ параболической линией $y = 0$ уравнения (8.15). Положим при этом, что подобласть D_1 ограничена простой дугой Жордана Γ_0, которая расположена целиком в верхней полуплоскости $y > 0$ и оканчивается в точках $A_1(x_1, 0)$ и $A_2(x_2, 0)$, $x_1 < x_2$, а контур гиперболической части D_2 состоит из двух характеристик A_1C и A_2C, принадлежащих к семействам (8.17а) и (8.17б) соответственно (рис. 4). Условимся, далее, называть функцию $z(x, y)$ *регулярной в области* D, если она ограничена и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и имеет первые производные, непрерывные и ограниченные всюду в области D и на ее границе,

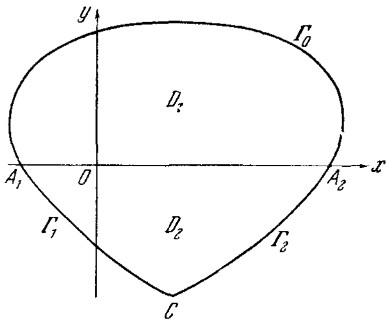

Рис. 4.

*) Кроме цитируемых первоисточников, формулировку этих задач и их газодинамическую интерпретацию читатель может найти в монографиях [8] и [19], а также в обзорной статье [74].

за исключением, быть может, точек A_1 и A_2, вблизи которых $\nu(x) = z_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность, но так, чтобы порядок этой бесконечности был меньше некоторого числа α, $0 < \alpha \leqslant 1$. Последнее ограничение, играющее важную роль в теоремах существования (см. § 5), будем называть *условием Трикоми с показателем* α (Трикоми при $K(y) = y$ впервые изучал классы R_α таких решений с показателями $\alpha = \frac{5}{6}$, $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\alpha = 1$ [51], [99], [100]). Первой корректно поставленной смешанной краевой задачей, т. е. задачей, где краевые данные задаются как на эллиптическом, так и на гиперболическом участке границы, была

Задача Трикоми (задача T): найти регулярное в области D решение $z(x, y)$ уравнения (8.15), принимающее на дуге Γ_0 и на одной из характеристик, например на A_1C, наперед заданные непрерывные значения:

$$z = f(x) \text{ на } \Gamma_0; \quad z = \varphi(x) \text{ на } A_1C; \quad f(x_1) = \varphi(x_1). \tag{8.19}$$

При решении этой проблемы для уравнения (8.18) важную роль играет ее частный случай — *нормальная задача Трикоми* T_0, в которой Γ_0 представляет собой так называемый *нормальный эллиптический контур* γ_0, определенный уравнением

$$x^2 + \frac{4}{(n+2)^2} y^{n+2} = a^2, \quad y \geqslant 0 \qquad (a = \text{const}). \tag{8.20}$$

Путем выбора смешанных областей более сложной конфигурации и надлежащего видоизменения граничных условий сформулированная основная краевая проблема T получила следующие важные обобщения.

1. Задачи Геллерстедта. Рассмотрим уравнение (8.15) в некоторой конечной односвязной области D, контур которой $\mathfrak{B} = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 + \Gamma_2$ образован следующими линиями: 1) кривой Γ_0, лежащей в полуплоскости $y > 0$ и соединяющей точки $A_1(x_1, 0)$ и $A_2(x_2, 0)$; 2) двумя характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения (8.15), исходящими из некоторой точки $B(x_0, 0)$ оси Ox $(x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2)$; 3) двумя характеристиками Γ_1 и Γ_2, проведенными через точки A_1 и A_2 соответственно (рис. 5).

При этом предполагается, что $\gamma_1 + \Gamma_1$ и $\gamma_2 + \Gamma_2$ являются интегральными кривыми уравнений (8.17а) и (8.17б) соответственно. С. Геллерстедт [85] исследовал для такой области две краевые задачи:

Задача G_1. В области D необходимо определить решение уравнения (8.15) по его граничным значениям на линии Γ_0 и двух дугах характеристик BE_1 и BE_2 (рис. 5):

$$z|_{\Gamma_0}=f(x),\quad z|_{BE_1}=\varphi_1(x),\quad z|_{BE_2}=\varphi_2(x),\quad \varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0). \tag{8.21}$$

Задача G_2. В области D разыскивается решение $z(x, y)$ уравнения (8.15) с краевыми данными

$$z|_{\Gamma_0}=f(x),\quad z|_{A_1E_1}=\varphi_1(x),\quad z|_{A_2E_2}=\varphi_2(x), \tag{8.22}$$

где

$$f(x_1)=\varphi_1(x_1),\quad f(x_2)=\varphi_2(x_2).$$

Заметим, что обе задачи G_1 и G_2 сводятся к задаче Трикоми, когда точка B совпадает с A_1. Наряду с задачами G_1 и G_2, где в гиперболической полуплоскости $y<0$ граничные условия задаются на дугах $\gamma_1+\gamma_2$ или $\Gamma_1+\Gamma_2$, принадлежащих двум разным семействам характеристик (8.17а) и (8.17б), М. Проттер [97] рассматривал случай, когда при $y<0$ краевые данные несут характеристики $\gamma_1+\Gamma_1$ (или $\gamma_2+\Gamma_2$) одного и того же семейства (8.17а) (или (8.17б)), а также более общий случай, когда точка B находится ниже оси Ox.

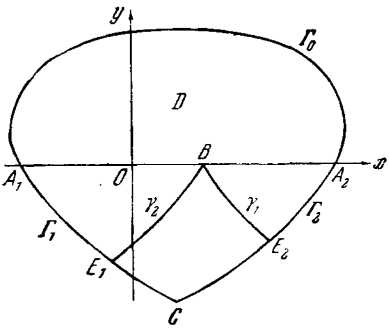

Рис. 5.

2. **Задачи Франкля — Моравец.** Исследуя перечисленные выше трансзвуковые проблемы (истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками, течение в сопле Лаваля с переходом через скорость звука, обтекание крылового профиля звуковым потоком газа), Ф. И. Франкль пришел к важным обобщениям задач Трикоми и Геллерстедта. Для формулировки этих обобщений заменим характеристики Γ_1 и $\Gamma_1+\Gamma_2$, несущие

граничные значения в задачах T и G_2, некоторыми кривыми σ_1 и σ_2 (рис. 6 и 7), полагая, что они обладают следующими свойствами:

1) линии σ_1 и σ_2 пересекают каждую характеристику семейства (8.17б) и (8.17а) соответственно не более одного раза;

2) σ_1 и σ_2 расположены целиком внутри характеристических треугольников $A_1C'A_2$ (рис. 6) и $A_1B_1'O$, $OB_2'A_2$ (рис. 7), причем

$$\frac{dy}{dx} \leqslant 0 \text{ на } \sigma_1,$$

$$\frac{dy}{dx} \geqslant 0 \text{ на } \sigma_2; \qquad (8.23)$$

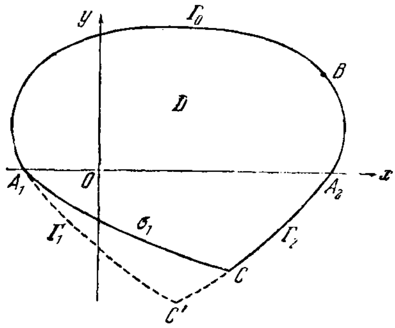

Рис. 6.

3) наклоны линий σ_1 и σ_2 к оси Ox не должны превосходить наклона характеристик (8.17), проходящих через соответствующую точку этих линий, т. е.

$$\frac{dy}{dx} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{-K}} \text{ на } \sigma_1,$$

$$\frac{dy}{dx} \leqslant \frac{1}{\sqrt{-K}} \text{ на } \sigma_2. \qquad (8.24)$$

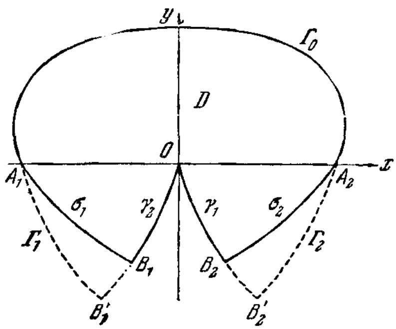

Рис. 7.

При этих предпосылках рассматривались [65], [90]:

а) Задача Франкля (задача Φ_1), в которой функция $z(x, y)$ строится в области $D = A_1CA_2BA_1$, изображенной на рис. 6, по ее краевым данным:

$$z\Big|_{\Gamma_0} = f(x), \quad z\Big|_{\sigma_1} = \varphi(x), \quad f(x_1) = \varphi(x_1). \qquad (8.25)$$

б) Задача Франкля—Моравец, где решение $z(x, y)$ уравнения (8.15) подлежит определению в области D с границей $\Gamma_0 + \sigma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 + \sigma_2$ (рис. 7) при условии, что на линии $\Gamma_0+\sigma_1+\sigma_2$ $z(x, y)$ принимает наперед заданные значения:

$$\left.\begin{array}{c} z\big|_{\Gamma_0}=f(x), \quad z\big|_{\sigma_1}=\varphi_1(x), \quad z\big|_{\sigma_2}=\varphi_2(x), \\ f(x_1)=\varphi_1(x_1), \quad f(x_2)=\varphi_2(x_2). \end{array}\right\} \tag{8.26}$$

Ясно, что проблемы (8.25) и (8.26) содержат в себе как частный случай задачи (8.19) и (8.22) соответственно, к которым они приводятся, когда $\sigma_1=\Gamma_1$, $\sigma_2=\Gamma_2$.

3. Смешанные краевые задачи, аналогичные эллиптической проблеме Неймана. Все перечисленные выше задачи, где на контуре рассмотренных областей задавались значения искомой функции, соответствуют классической проблеме Дирихле. Исследуя обтекание клина сверхзвуковым потоком газа, Ф. И. Франкль показал [56], [58], что если перед клином образуется зона дозвуковых скоростей, то возникает новая краевая проблема (задача Φ_2), в которой на дугах A_1B+A_1C (или A_1B+A_1C') известны значения интеграла $z(x, y)$ уравнения (8.15), а на некоторой части A_2B эллиптической границы Γ_0 (рис. 6) имеет место линейное соотношение

$$P(x, y)z_x+Q(x, y)z_y=0, \tag{8.27а}$$

где P и Q — наперед заданные коэффициенты. К этим однородным граничным условиям для обеспечения единственности решения присоединяется дополнительно требование: $z(x_2, 0)=d$, где d — заданная константа.

Позже К. Моравец в связи с другими трансзвуковыми вопросами [92], [93] рассмотрела для области, изображенной на рис. 7, решение $z(x, y)$ уравнения Чаплыгина при краевых условиях вида

$$Kz_x\frac{dy}{ds}-z_y\frac{dx}{ds}=f \quad \text{на} \quad \Gamma_0+\sigma_1+\sigma_2. \tag{8.27б}$$

Здесь f — заданная функция длины дуги s, причем s отсчитывается от точки A_2 против часовой стрелки. Легко видеть, что эта задача является аналогом известной проблемы Неймана для уравнений эллиптического типа. Действительно, перейдя в (8.15) при $y\geqslant 0$ к переменным $\xi=x$, $\eta=\int\limits_0^y\sqrt{K(y)}\,dy$, получим эллиптическую нормальную форму этого уравнения: $z_{\xi\xi}+z_{\eta\eta}+\frac{d}{d\eta}[\ln\sqrt{K}]z_\eta=0$. При этом (8.27б) преобразуется в краевое условие Неймана: $\sqrt{K}\frac{\partial z}{\partial n}=-f$ на линии Γ_0^*, где n — внутренняя нормаль к образу Γ_0^* кривой Γ_0 на плоскости (ξ, η). Наряду с этим изучался также комбинированный случай [9], [79], когда на Γ_0 требуется выполнение равенства (8.27б), а на $\sigma_1+\sigma_2$ заданные значения предписываются самой функции $z(x, y)$.

4. «Ударные» задачи Франкля. Существенно отличаются от смешанных задач, рассмотренных выше, так называемые «ударные» трансзвуковые задачи Ф. И. Франкля. Решение этих задач, поставленных Франклем в работах [67], [68], дает

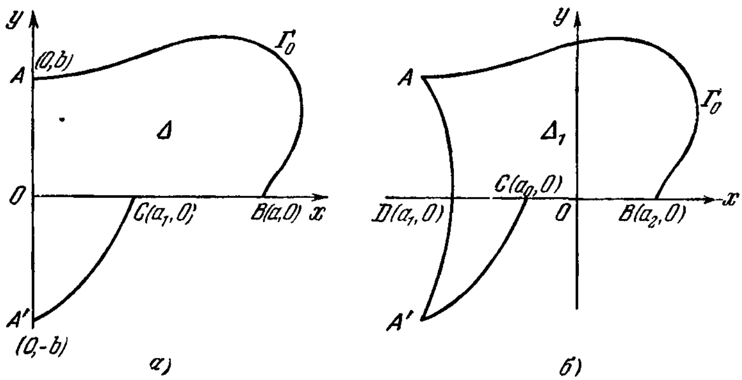

Рис. 8.

возможность получить обтекание крылового профиля дозвуковым потоком газа в случае, когда на профиле образуются местные сверхзвуковые зоны, оканчивающиеся прямыми или криволинейными скачками уплотнения. При этом существенно новый характер таких проблем обусловлен именно появлением ударных волн, замыкающих сверхзвуковые зоны.

Обозначим через Δ (рис. 8, *а*) область, ограниченную отрезком AA' оси Oy, $-b\leqslant y\leqslant b$, гладкой кривой Γ_0 с концами в точках $A(0, b)$ и $B(a, 0)$, характеристикой $A'C$ уравнения

(8.15), соединяющей точки $A'(0, -b)$ и $C(a_1, 0)$, $0 < a_1 \leqslant a$, и отрезком CB оси $y=0$, $a_1 \leqslant x \leqslant a$. Тогда в обобщенной *) постановке первая «ударная» задача Франкля состоит в определении решения уравнения (8.15), непрерывного в замкнутой области $\bar{\Delta}$ и удовлетворяющего граничным условиям:

$$z\Big|_{\Gamma_0} = f_1(s), \quad z\Big|_{CB} = f_2(x), \quad a_1 \leqslant x \leqslant a, \tag{8.28а}$$

$$z_x\Big|_{AA'} = 0, \quad z(0, y) - z(0, -y) = \varphi(y), -b \leqslant y \leqslant b. \tag{8.28б}$$

Здесь f_1, f_2 и φ — наперед заданные непрерывные функции.

Вторая «ударная» задача Франкля связана с областью Δ_1, образованной дугой ADA' (рис. 8, *б*), эллиптическим контуром $\Gamma_0 = AB$, имеющим одну общую точку $B(a_2, 0)$ с осью Ox, отрезком BC линии перехода $y=0$, где $a_1 < a_0 \leqslant x \leqslant a_2$, и характеристикой $A'C$ уравнения Чаплыгина. При этом дуги DA' и DA соответствуют передней (сверхзвуковой) и задней (дозвуковой) сторонам скачка уплотнения. На границах $\Gamma_0 + BC + AA'$ этой области задаются следующие краевые условия:

1) $z = f_1(s)$ на Γ_0; $\quad z = f_2(x)$ на BC $\quad (a_0 \leqslant x \leqslant a_2)$.

(8.29)

2) Пусть координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) отвечают векторам скорости в одной и той же точке скачка уплотнения на его передней и задней сторонах. Тогда на линии ADA' точки дуги DA $(x=x_2, y=y_2)$ и дуги DA' $(x=x_1, y=y_1)$ поставлены в соответствие друг с другом посредством уравнения

$$2(x_2 - x_1)^2 + (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)^2 = 0, \tag{8.30}$$

причем в соответствующих друг другу точках должно иметь место соотношение $z(x_1, y_1) = z(x_2, y_2)$.

В случае прямолинейного скачка уплотнения, где $x_1 = x_2 = 0$, дуга ADA' становится отрезком вертикальной пря-

*) У Франкля $\varphi(y) \equiv 0$ [67]. Другая постановка той же задачи дана Франклем в работе [68].

мой, а равенство (8.30) переходит в условие $y_2 = -y_1$ и, таким образом, вторая ударная задача Франкля сводится к первой ударной задаче с нулевой краевой функцией $\varphi(y) \equiv 0$.

§ 3. Краевые задачи, исследованные для других уравнений смешанного типа

Перейдем теперь к формулировке тех смешанных краевых задач, которые исследовались для других уравнений эллиптико-гиперболического типа, перечисленных в § 1.

1. Обобщенные задачи Геллерстедта и смешанные краевые проблемы для многосвязных областей. Два обобщения задач Геллерстедта были предложены в работах [9] и [30]. В первой из них решение $z(x, y)$ уравнения (8.6) определяется по его значениям на линии Γ_0, а также на отрезках AA_1, A_2A_3, ... и B_1B_2, B_3B_4, ... характеристик AC и CB соответственно (рис. 9, *а*). Во второй методом сеток для уравнения (8.6) решается краевая проблема, в которой искомая функция принимает предписанные значения на эллиптических контурах $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + + \ldots$ и характеристиках $A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3 + \ldots$ (рис. 9, *б*). Наряду с этим применительно к уравнению (8.6) рассматривались многосвязные области, показанные на рис. 10, *а* и *б*, причем в этом случае оказалось (см. [9] и [30]), что для однозначной разрешимости соответствующих смешанных задач, кроме краевых значений на всей эллиптической части

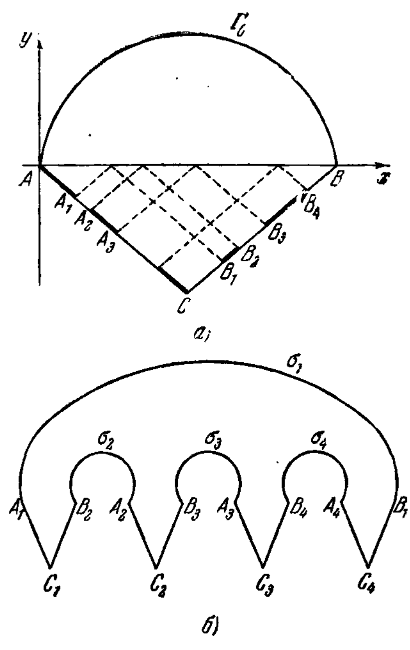

Рис. 9.

границы $\sigma_1 + \sigma_2$ (рис. 10, *а*) и $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots$ (рис. 10, *б*), достаточно задать, например, значение $z(x, y)$ на характеристиках $A_1C_1 + A_2C_2$ (рис. 10, *а*) и $A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3 + \ldots$ (рис. 10, *б*) соответственно.

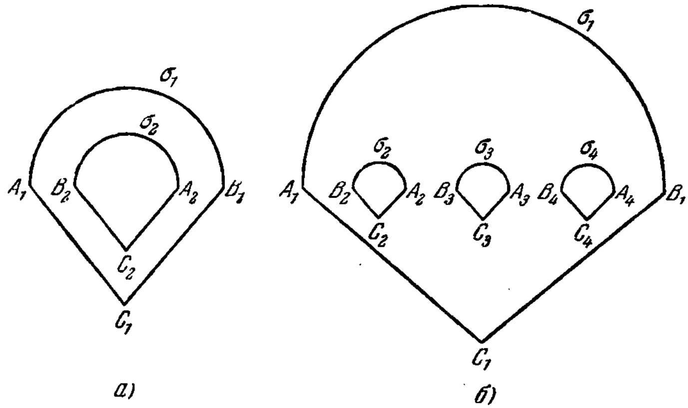

Рис. 10.

2. Краевые проблемы для смешанных уравнений второго рода.

а) Разрывная задача Франкля. Ф. И. Франкль [73] свел задачу определения течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы (прямую задачу теории сопла Лаваля) к новой краевой проблеме для смешанного уравнения второго рода (8.12):

$$\operatorname{sgn} y\, |y|^{\alpha} z_{xx} + z_{yy} = 0 \tag{8.31}$$

с показателем $\alpha = -\frac{1}{2}$. А именно, придя на плоскости годографа к области $D = A_1CA_2A_1$, изображенной на рис. 4, где Γ_1 и Γ_2 на этот раз характеристики уравнения (8.31), Франкль показал, что для обеспечения существования и единственности в D решения $z(x, y)$ уравнения (8.31) при $-1 < \alpha < 0$ уже недостаточно подчинить функцию $z(x, y)$ условиям (8.19), а следует, сверх того, на отрезке A_1A_2 линии перехода вместо обычного требования непрерывности $z_y(x, +0) = z_y(x, -0)$ ввести предположение (условие разрывности Франкля)

$$z_y(x, +0) = -z_y(x, -0). \tag{8.32}$$

Очевидно, такое же дополнительное условие необходимо и для корректной формулировки других смешанных задач для уравнения (8.31).

б) Краевые задачи для уравнений второго рода с младшими членами. Как следует из результатов М. В. Келдыша [34], характер краевых задач, которые могут быть поставлены для линейных уравнений второго порядка с параболическими линиями, зависит не только от слагаемых, содержащих вторые производные искомой функции, но также и от младших членов уравнения. Аналогичные исследования, проведенные на примере уравнения $S_\alpha[z] = z_{xx} + yz_{yy} + \alpha z_y = 0$ (α — вещественная константа), показали [32], что смешанные краевые задачи, которые допускает оператор $S_\alpha[z]$, существенно зависят от значения коэффициента α. Так, например, было обнаружено, что задача Трикоми (8.19) в случае $\alpha < 0$ недоопределена (ее решение не единственно), а напротив, здесь при некоторых условиях гладкости корректна краевая задача Дирихле с данными на всей границе $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$ области D (рис. 4). Наоборот, при $\alpha > 0$ задача T переопределена (ее решение не существует) и для определения функции $z(x, y)$ во всей смешанной области D достаточно задать ее значение лишь на эллиптической дуге Γ_0, а обе характеристики Γ_1 и Γ_2 следует освободить от граничных условий.

Различные обобщения этих проблем рассматривались в заметках [32] и [33].

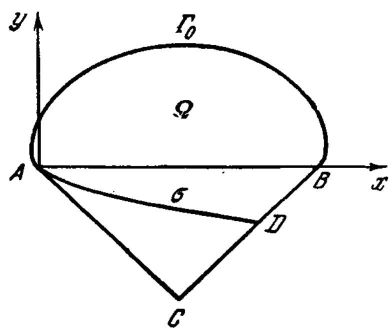

Рис. 11.

3. Смешанные краевые задачи для уравнений высших порядков. В случае модельного уравнения четвертого порядка (8.14) при постановке смешанных задач можно рассматривать четыре типа допустимых краевых данных [3], [47]—[49]. Эти данные задаются на границах односвязной области Ω, образованной простой гладкой кривой Γ_0 с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и характеристиками AC: $y = -x$ и BC: $y = x - 1$ уравнения (8.14) (рис. 11). Условия первого типа имеют вид

$$z\Big|_{\Gamma_0} = f_1(s), \quad \frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} = f_2(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant l), \tag{8.33а}$$

$$\left.\begin{aligned} z|_{y=-x} &= \varphi_1(x) \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}\right), \\ z|_{y=x-1} &= \varphi_2(x) \qquad \left(\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.33б}$$

Здесь l — длина дуги Γ_0, n — внутренняя нормаль, а f_1, f_2, φ_1 и φ_2 — заданные функции, для которых $f_1(l) = \varphi_1(0)$, $f_1(0) = \varphi_2(1)$, $\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

В краевых условиях второго и третьего типа требования (8.33а) сохраняются, а (8.33б) заменяются соответственно равенствами

$$z\Big|_{y=-x} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{y=x-1} = \varphi_2(x)$$

$$\text{и} \quad z\Big|_{y=-x} = \bar{\varphi}_1(x), \quad \frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{y=-x} = \bar{\varphi}_2(x),$$

где $f_1(l) = \varphi_1(0) = \bar{\varphi}_1(0)$. Наконец, в условиях четвертого типа, наряду с (8.33а), нормальная производная $\frac{\partial z}{\partial n}$ предписывается одновременно на обоих характеристиках AC и CB: $\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{y=-x} = \varphi_1(x)$, $\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{y=x-1} = \varphi_2(x)$. Кроме этого, для уравнения (8.14) изучалась следующая «нехарактеристическая» смешанная краевая проблема [3]. Рассмотрим область $ADBA$ (рис. 11), контур которой, наряду с линией Γ_0 и характеристикой BD, содержит дугу $\sigma = \breve{AD}$ монотонной кривой $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant x_0$, расположенной внутри характеристического треугольника ABC, и пусть $|g'(x)| < 1$ вдоль σ. Тогда при некоторых условиях гладкости функций f_i ($i = 1$, 2, 3, 4) для (8.14) разрешима граничная задача

$$z = \begin{cases} f_1(s) & \text{на } \Gamma_0, \\ f_2(x) & \text{на } \sigma; \end{cases} \qquad z_{xx} + \operatorname{sgn} y\, z_{yy} = \begin{cases} f_3(s) & \text{на } \Gamma_0, \\ f_4(x) & \text{на } \sigma. \end{cases}$$

Здесь, как и выше, s — длина дуги на кривой Γ_0, отсчитываемая от точки B к A, причем полагается $f_1(l) = f_2(0)$,

$f_3(l)=f_4(0)$. Аналогичная краевая проблема может быть поставлена и для уравнения n-го порядка

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n z=0,$$

где n — целое положительное число [26].

Краевые задачи в смешанной области изучались также для уравнений смешанно-составного типа $L\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]=0$ в случаях, когда L — оператор Трикоми $\mathfrak{T}_1$ (8.2) [12] или дифференциальный оператор Лаврентьева — Бицадзе L_0 (8.6) [24].

4. Смешанные краевые задачи в пространстве трех и большего числа измерений. Проблемы Геллерстедта G_1 и G_2 допускают обобщение на случай пространства любого числа измерений. Ограничимся, для простоты изложения, «нормальными» задачами Геллерстедта в трехмерном пространстве (x, y, z). Построим в нем полусферу S единичного радиуса: $r^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, и два характеристических конуса K_1 и K_2 уравнения (8.13), первый из которых K_1: $r=z+1$, $-1\leqslant z\leqslant 0$, имеет вершину в точке A $(0, 0, -1)$ и обращен основанием в сторону положительной части оси Oz, а второй K_2: $r+z=0$, $z\leqslant 0$, направлен основанием в сторону отрицательной части оси Oz, а его вершина совпадает с началом координат (рис. 12). Эти конусы пересекаются вдоль окружности γ_1: $r=\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$. Обозначим, наконец, через Ω область, ограниченную поверхностью S и теми частями K_1^* и K_2^* конусов K_1 и K_2, которые заключены

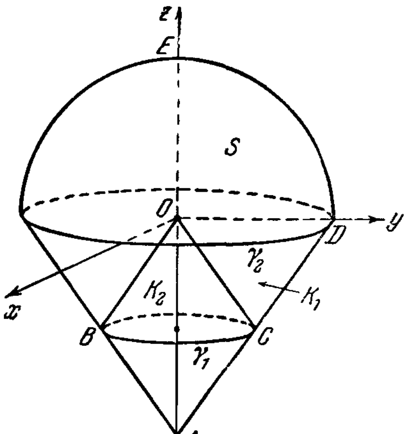

Рис. 12.

между плоскостями $z=0$ и $z=-\frac{1}{2}$ *). Тогда трехмерный аналог проблем Геллерстедта состоит в отыскании решения $u(x, y, z)$ уравнения (8.13), непрерывного в замкнутой области $\bar{\Omega}$ при условии, что на $S+K_2^*$ в первой задаче и на $S+K_1^*$ во второй пространственной задаче Геллерстедта выполняются соответственно равенства

$$u\Big|_S=f_1(M), \quad u\Big|_{K_2^*}=\varphi_1(M) \quad \text{и} \quad u\Big|_S=f_2(M), \quad u\Big|_{K_1^*}=\varphi_2(M),$$

где $f_i(M)$ и $\varphi_i(M)$ — заданные функции точки $M(x, y, z)$, причем $f_2(M)=\varphi_2(M)$ на окружности γ_2: $r=1$, $z=0$.

Подобные задачи рассматривались также для уравнения $K(z)(u_{xx}+u_{yy})+u_{zz}=0$, где $zK(z)>0$ при $z\neq 0$, $K(0)=0$, $K'(z)>0$ [98], а в $(n+1)$-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_n, z)$ — для модельного уравнения [10]

$$\sum_{k=1}^{n} u_{x_k x_k}+\operatorname{sgn} z u_{zz}=0.$$

При этом было замечено, что обе проблемы Геллерстедта в приведенной выше постановке могут оказаться некорректными в том случае, когда вершина конуса K_2 находится не в начале координат, а в любой другой точке круга γ_2. Трехмерный аналог задачи Трикоми изучался в работе [13].

§ 4. Теоремы единственности и методы их доказательства

Переходя к рассмотрению теорем единственности, остановимся сначала на краткой характеристике тех главных классов функций, в которых может быть гарантирована однозначность решения смешанных задач при условии, что такие решения существуют. Как показывают приведенные ниже теоремы существования (§ 5), если не вводить специальных, довольно жестких ограничений на краевые данные (8.19), то решение задачи Трикоми порождает функцию $\nu(x)=z_y(x, 0)$, обращающуюся в точке A_2 (рис. 4) в бесконечность порядка

---

*) Область Ω может быть получена вращением плоской фигуры $OCDEO$ вокруг оси Oz.

$1/(n+2)$ (в случае, когда $K(y)=O(y^n)$ при $y\to 0$ и $n>0$). Такими же особенностями в параболических точках границы обладают и решения других смешанных краевых задач. Поэтому при доказательстве теорем единственности нельзя ограничиться слишком узким классом функций, имеющих производные первого порядка, конечные и непрерывные не только внутри данной смешанной области, но и повсюду на ее границе. Наоборот, приходится допустить, что в точках пересечения этой границы с линией перехода производная $z_y(x, 0)=$ $=\nu(x)$ может иметь степенные особенности при условии, что их порядок μ не слишком высок ($\mu<1$). Трикоми достигает этого введением описанных выше классов R_α регулярных решений и, совершенствуя методы доказательства, устанавливает единственность в R_α решения задачи (8.2), (8.19) последовательно для показателей $\alpha=\frac{5}{6}$ [51], $\alpha=\frac{2}{3}$ [99] и $\alpha=1$ [100]. Эти классы Трикоми R_α, играющие важную роль во всей теории, были положены в основу большинства исследований по проблеме существования и единственности. Однако наряду с ними для той же цели применялись и другие множества функций, среди которых в первую очередь следует отметить классы Q так называемых квазирегулярных решений [84], [97]. Как определяются подобные классы, мы покажем ниже на примере abc-метода Проттера.

При доказательстве теорем единственности для смешанных краевых задач нашли применение следующие методы: 1) метод интегралов энергии, 2) метод вспомогательных функций, 3) метод, основанный на принципах максимума-минимума. Излагая идею этих приемов, мы приводим ниже подробную формулировку результатов только для задач Трикоми и Франкля — Моравец. Приложение этих же методов к другим смешанным задачам читатель может найти в цитируемых первоисточниках.

1. Метод интегралов энергии. Метод интегралов энергии в его обобщенной форме состоит в следующем. Пусть в некоторой области D плоскости (x, y) необходимо найти решение $z=z(x, y)$ дифференциального уравнения $L[z]=0$, причем на всей границе области D или на определенной ее части Γ задается дополнительное однородное условие $\mathfrak{B}_\Gamma[z]=0$

с нулевыми краевыми данными. Чтобы доказать, что $z \equiv 0$ повсюду в D, составляют выражение вида

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y, z, z_x, z_y) L[z] \, dx \, dy = 0, \tag{8.34}$$

в котором интеграл распространен по некоторой части Δ области D, а $\Phi(x, y, z, z_x, z_y)$ — достаточно гладкая функция. Затем, выбирая подходящим образом Δ и функцию Φ, преобразуют (8.34) по формуле Грина в контурный интеграл по границе области Δ и используют при этом условие $\mathfrak{B}_\Gamma[z] = 0$. Таким путем приходят к дефинитным выражениям, обращение которых в нуль влечет за собой вывод, что $z \equiv 0$ в D. Трикоми [51] при доказательстве единственности решения задачи (8.2), (8.19) принимал $\Phi = z$, $\Delta = D_1$ (рис. 4), что приводило (при $f = \varphi \equiv 0$) к равенству

$$\int_{x_1}^{x_2} \tau(x) \nu(x) \, dx + \iint_{D_1} (y z_x^2 + z_y^2) \, dx \, dy = 0,$$

где $\tau(x) = z(x, 0)$, $\nu(x) = z_y(x, 0)$.

Аналогичным путем [85] получались теоремы единственности и для задач Геллерстедта в случае уравнения (8.18). При этом неотрицательность интеграла $I_0 = \int_{x_1}^{x_2} \tau(x) \nu(x) \, dx$ устанавливалась с помощью явного соотношения между функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$, найденного в результате решения вырожденных гиперболических задач в подобласти D_2. Однако такие явные равенства связаны со специальными свойствами уравнения (8.18), и поэтому метод Трикоми не мог быть распространен на нехарактеристические смешанные задачи и на более общие уравнения эллиптико-гиперболического типа. Для уравнения С. А. Чаплыгина (8.15) первые теоремы единственности в смешанных областях были получены Ф. И. Франклем [56]. Рассматривая задачу (8.19), Франкль полагал сначала $\Delta = D_1$, $\Phi = z$, $L[z] = K(y) z_{xx} + z_{yy}$, что дает при $f \equiv 0$

$$I_0 = \int_{x_1}^{x_2} \tau(x) \nu(x) \, dx = -\iint_{D_1} [K(y) z_x^2 + z_y^2] \, dx \, dy \leqslant 0. \tag{8.35}$$

Наоборот, если исходить из гиперболической части $\Delta = D_2$ области D, то тогда при $\Phi = z$, $\varphi \equiv 0$ можно получить противоположный результат: $I_0 \geqslant 0$, из которого следует, что $I_0 = 0$ и поэтому $z \equiv 0$ в D. Однако, в то время как неравенство (8.35) установлено без каких-либо существенных ограничений на форму подобласти D_1 и ее границы, при выводе оценки $I_0 \geqslant 0$ пришлось потребовать, чтобы

$$F(y) \equiv 2\left(\frac{K}{K'}\right)' + 1 \geqslant 0 \quad \text{в } D_2. \tag{8.36}$$

Такое условие означает, что если функция $F(y)$ для всех значений $y \leqslant 0$ неотрицательна, то теорема единственности Франкля справедлива при сколь угодно больших размерах характеристического треугольника A_1CA_2 (рис. 4). Это имеет место, например, для уравнения (8.18), где $F(y) = 1 + \frac{2}{n} > 0$, когда $n > 0$. Однако в случае уравнения Чаплыгина (8.7) коэффициенту (8.8) отвечает значение

$$F(y) = [2 - (2 + \beta)\tau]/[\beta(1 + 2\beta)\tau^2],$$

и так как $\beta > 0$, то в сверхзвуковой области $F(y) \geqslant 0$, когда $1/(1 + 2\beta) \leqslant \tau \leqslant 2/(2 + \beta)$ $(1 \leqslant M \leqslant 2)$, и, наоборот, $F(y) \leqslant 0$, если $2/(2 + \beta) \leqslant \tau < 1$ $(2 \leqslant M < \infty$, где M — число Маха). Таким образом, здесь для выполнения условия (8.36) необходимо потребовать, чтобы в точке C было $M \leqslant 2$, и тем самым ограничить размеры области $D_2 = A_1CA_2$ (рис. 4). Таким путем в работах [56], [58] и [73] была доказана единственность решения задачи Φ_2 с условием (8.27а), а также решения разрывной проблемы Франкля (8.31), (8.32), (8.19).

Дальнейшее продвижение в изучении вопросов единственности дал так называемый *abc-метод Проттера — Моравец*. В нем также исходят из равенства (8.34), но в качестве множителя Φ берут линейную комбинацию

$$\Phi = a(x, y)z + b(x, y)z_x + c(x, y)z_y,$$

где a, b и c — подлежащие определению достаточно гладкие функции от (x, y). Приведем несколько важных результатов, полученных на этом пути. Условимся называть функцию $z(x, y)$ *квазирегулярной в области* D (рис. 4), если она обладает такими свойствами: 1) $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению (8.15); 2) для этой функции существуют интегралы $\int_{x_1}^{x_2} \tau(x)\nu(x)\,dx$ и $\iint_{D_1} (Kz_x^2 + z_y^2)\,dx\,dy$; 3) пусть $D(\varepsilon)$ — некоторая область с границей $\gamma(\varepsilon)$, лежащей внутри области D. Применим теорему Грина к двойным интегралам

$$\iint\limits_{D(\varepsilon)} zL[z]\,dx\,dy, \quad \iint\limits_{D(\varepsilon)} z_x L[z]\,dx\,dy, \quad \iint\limits_{D(\varepsilon)} z_y L[z]\,dx\,dy$$

и потребуем, чтобы для возникающих при этом криволинейных интегралов по кривой $\gamma(\varepsilon)$ существовал предел, когда $\gamma(\varepsilon)$ приближается к контуру области D.

В этом классе функций Q для задачи (8.15), (8.19) имеют место следующие теоремы единственности [97]:

Теорема 8.1. *Положим, что $K(y)$ — монотонно возрастающая функция с непрерывной второй производной, причем $K(0)=0$, $F(0)>0$, а $K'(y)\neq 0$ при $y<0$. Пусть, далее, $z(x, y)$ является квазирегулярным решением уравнения* (8.15), *которое обращается в нуль на линиях $\Gamma_0+\Gamma_1$* (*рис.* 4). *При этих условиях существует константа $d_0<0$ такая, что если $F(y)\geqslant d_0$ в D, то $z\equiv 0$ повсюду в области D.*

Теорема 8.2. *Обозначим через y_m максимальную ординату на кривой Γ_0* (*рис.* 4), *и пусть $K(y)$ и $z(x, y)$ обладают теми же свойствами, что и в теореме* 1. *Тогда существует положительная константа d_1 такая, что если $y_m<d_1$, то $z\equiv 0$ в области D.*

Теорема 8.3. *Предположим, что $K(y)$ имеет непрерывную производную третьего порядка, которая в полуплоскости $y<0$ удовлетворяет условию $K'''(y)\leqslant 0$, и пусть при этом $F(y)<0$, когда $y<0$. Тогда любое решение $z(x, y)$ уравнения* (8.15), *принадлежащее к классу Q в области D и обращающееся в нуль на $\Gamma_0+\Gamma_1$* (*рис.* 4), *будет тождественным нулем повсюду в области D.*

Таким образом, в теореме 8.1 эллиптическая часть D_1 области D свободна от каких-либо ограничений, но зато гиперболическая часть D_2, в силу условия $F(y)\geqslant d_0$ в D, не должна слишком удаляться от линии перехода $y=0$. Тем не менее здесь $d_0<0$, т. е. функция $F(y)$ может принимать и отрицательные значения в D_2, так что условие Проттера $F(y)\geqslant d_0$ менее жесткое, чем требование Франкля (8.36). Наоборот, в теореме 8.2 функция $F(y)$ может принимать любые значения при $y<0$, и поэтому гиперболическая подобласть D_2 может быть произвольной, но зато контур Γ_0 не должен простираться слишком далеко в эллиптическую полуплоскость $y>0$. Более сильное утверждение содержит теорема 8.3. В ней допускается произвольный эллиптический контур Γ_0, и, с другой стороны, эта теорема пригодна в той области $2/(2+\beta)\leqslant\tau<1$, где $F(y)<0$ и, следовательно, критерий Франкля (8.36) не выполняется. Однако если в этой области $K'''(y)>0$, то и эта теорема Проттера теряет силу.

В аналогичной форме abc-метод с успехом был применен и для доказательства однозначной разрешимости задачи Франкля — Моравец. Для этой задачи К. Моравец [90], рассматривая область $D=A_1B_1OB_2A_2A_1$ (рис. 7) и полагая в формуле (8.34) $\Phi=bz_x+cz_y$, пришла к теореме единственности при следующих предположениях. Пусть $K(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, для которой $K(0)=0$, а $K'(y)\geqslant 0$ при $y\geqslant 0$. Будем считать, что кривая Γ_0 звездная относительно точки O (рис. 7); аналитически это требование означает, что при движении вдоль Γ_0 против часовой стрелки должно быть

$$x\,dy-y\,dx\geqslant 0. \tag{8.37}$$

Примем также, что функция $z(x, y)$ непрерывна вместе со своими первыми производными на замыкании области D, кроме, быть может, точек A_1, O и A_2, где z_x и z_y могут обращаться в бесконечность порядка не выше первого *). *Если при этих предпосылках $z(x, y)$ является решением уравнения* (8.15), *для которого $z=0$ на $\Gamma_0+\sigma_1+\sigma_2$, то $z\equiv 0$ повсюду в области D.*

Дальнейшее развитие получил abc-метод в работах У Синь-мо, Дин Ся-си [95] и Проттера. Этот способ в различных вариантах применялся к проблеме Франкля (8.27а) [2], к уравнению (8.11) [71], [92], а также при исследовании пространственных задач Геллерстедта [98]. Методом интегралов энергии изучались и смешанные задачи для уравнения (8.14) [49].

2. Метод вспомогательных функций. На совершенно другой идее основан метод вспомогательных функций, предложенный К. Моравец в работе [91]. Поясним в общих чертах сущность этого метода на примере задачи (8.15), (8.26). Для

*) В концевых точках A_1 и A_2 Моравец допускает также наличие бесконечности порядка $\leqslant 1/2$.

этого рассмотрим в области D (рис. 7) решение $z(x, y)$ уравнения (8.15), и пусть: 1) $z(x, y)$ непрерывна повсюду в области D и на ее границе $\mathfrak{B}=\Gamma_0+\sigma_1+\gamma_2+\gamma_1+\sigma_2$; 2) производные z_x и z_y от $z(x, y)$ таковы, что составленный с их помощью криволинейный интеграл

$$\psi(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [(Kz_x^2-z_y^2)dy-2z_xz_ydx], \qquad (x_0,y_0)\in D, \tag{8.38}$$

определяет функцию $\psi(x, y)$, непрерывную в $D+\mathfrak{B}$ *); 3) обозначим через α угол между осью Ox и направлением касательной к Γ_0, проведенной в сторону возрастания дуги при обходе контура Γ_0 против часовой стрелки. Потребуем, чтобы на контуре $\mathfrak{B}$ области D, кроме неравенств (8.23) и (8.24), выполнялось условие

$$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi \text{ на } \Gamma_0. \tag{8.39}$$

Если при этих гипотезах $z=0$ на $\Gamma_0+\sigma_1+\sigma_2$, то $z\equiv 0$ повсюду в области D.

При доказательстве этого утверждения прежде всего устанавливается, что функция $\psi(x, y)$, если только она не является константой, не может принимать максимального значения как во внутренних точках области D, так и на дугах $\sigma_1+\sigma_2+\gamma_1+\gamma_2$ ее границы. Это максимальное значение достигается только на контуре Γ_0, и притом в той его точке M, где $y>0$. В частности, для подобласти D_1 $(y>0)$ такой вывод следует из того, что здесь функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет нелинейному уравнению эллиптического типа $K\psi_{xx}+\psi_{yy}-\alpha\psi_x-\beta\psi_y=0$, коэффициенты которого $\alpha=K'\psi_x/2\sqrt{K\psi_x^2+\psi_y^2}$ и $\beta=\frac{K'}{2K}[1+\psi_y/\sqrt{K\psi_x^2+\psi_y^2}]$ ограничены в каждой точке полуплоскости $y>0$. Поэтому, в силу принципа максимума для эллиптических дифференциальных уравнений и известной леммы Зарембы — Хопфа, функция $\psi(x, y)$ не может достигнуть локального максимума внутри D_1, а в точке M на Γ_0, где $\psi(x, y)$ максимальна, ее производная $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ по направлению внутренней к Γ_0 нормали n должна быть

*) В силу (8.15) этот интеграл не зависит от пути интегрирования и тем самым действительно определяет некоторую функцию точки (x, y).

отрицательна: $\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_M < 0$. С другой стороны, с помощью условия (8.39) доказывается, что $\frac{\partial\psi}{\partial n} \geqslant 0$ в точке M. Это противоречие приводит к заключению, что $\psi = \text{const}$ повсюду в области D, и поэтому $z \equiv 0$ в D. Заметим, что здесь, так же как и в сформулированной выше теореме единственности К. Моравец, на функцию $K(y)$ при $y < 0$ не накладывается каких-либо условий, ограничивающих протяженность гиперболической подобласти D_2. С другой стороны, условие звездности (8.37) контура Γ_0 здесь заменено требованием (8.39), которое, в частности, выполняется, если Γ_0 не имеет петель. Методом вспомогательных функций были получены также теоремы единственности для смешанной задачи с косой производной (8.27б) [93], а также для первой «ударной» задачи Франкля (8.28) [21].

3. Теоремы единственности, вытекающие из экстремальных свойств решений смешанных краевых задач. Для проблемы Трикоми (рис. 4) имеет место так называемый принцип экстремума [4], [38], [78], [86], состоящий в следующем. Будем считать, что в уравнении (8.15) коэффициент $K(y) \in C^1(\bar{D})$, $K(y) \in C^2(D_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2)$ удовлетворяет условиям

$$K(0) = 0, \quad yK(y) > 0 \text{ при } y \neq 0;$$

$$K'(y) > 0, \quad \frac{d^2}{dy^2}\left[(-K)^{-\frac{1}{4}}\right] \geqslant 0 \text{ в } D_2 + \Gamma_1 + \Gamma_2. \quad (8.40)$$

Пусть, далее, функция $z \in C^0(\bar{D})$, $z \in C^1(\bar{D} - \Gamma_0 - A_1 - A_2)$, $z \in C^2(D)$ является решением задачи (8.19), обращающимся в нуль на Γ_1. *Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции $z(x, y)$ в $\bar{D}$ достигается на линии Γ_0.* Прямым следствием этого результата является

Теорема 8.4. *При указанных выше ограничениях для $K(y)$ задача (8.19) с краевыми функциями f и $\varphi \in C^0$ не может иметь более одного решения $z \in C^0(\bar{D})$, $z \in C^1(\bar{D} - \Gamma_0 - A_1 - A_2)$, $z \in C^2(D)$.*

Заметим, что все предположения этой теоремы выполняются для значения $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^{\alpha}$, если $\alpha \geqslant 1$. Однако в общем случае последнее из условий (8.40), $K'^2 \geqslant \frac{4}{5} KK''$ $(y<0)$, является даже более ограничительным требованием, чем критерий Франкля (8.36) $K'^2 \geqslant \frac{2}{3} KK''$ $(y<0)$.

Тем не менее по сравнению с другими приемами метод получения теорем единственности из принципа максимума-минимума имеет то преимущество, что в нем допускаются любые особенности первых производных от $z(x, y)$ в точках A_1, A_2 и не вводится никаких существенных ограничений на линию Γ_0.

Принцип экстремума в случае $K(y) = \operatorname{sgn} y$ удалось доказать и для смешанного аналога задачи Дирихле — Неймана, а также для краевых проблем, сформулированных выше для областей рис. 9, *а* и 10, *а* [9]. Заметим, что принцип максимума-минимума находит применение и при доказательстве теорем существования (см. § 5).

§ 5. Теоремы существования для смешанных краевых задач

При изучении вопросов существования решений смешанных краевых задач основным аппаратом исследования служили: 1) метод интегральных уравнений, 2) методы функционального анализа, 3) метод конечных разностей (метод сеток).

Ниже приводится краткая характеристика этих приемов; с их полной теорией читатель может познакомиться в цитируемой литературе.

1. Метод интегральных уравнений. Отправным пунктом в методе интегральных уравнений служит «нормальная» краевая проблема Трикоми. Рассмотрим такую задачу (8.19) для уравнения (8.18), полагая при этом, что теперь в полуплоскости $y>0$ точки $A_1(-1, 0)$ и $A_2(1, 0)$ (рис. 4) соединены дугой γ_0 нормальной кривой $x^2 + \frac{4}{(n+2)^2} y^{n+2} = 1$ $(y \geqslant 0)$. Трикоми [51] для значения $n=1$ и Геллерстедт [84] в случае $K(y) = y^n$ пришли к эффективному решению этой задачи, исследуя отдельно в областях D_1 и D_2 следующие две вырождающиеся краевые проблемы. Прежде всего, в эллиптической области D_1 изучается сингулярная задача

Дирихле — Неймана с краевыми данными

$$z|_{\gamma_0}=f(x),\ z_y(x,\ 0)=\nu(x)\ (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

Используя явное выражение для функции Грина этой задачи [88], удается найти ее эксплицитное решение $z_1=F_1[x,\ y;\ f(x);\ \nu(x)]$. Затем в гиперболической области D_2 рассматривается сингулярная задача Трикоми, где функция $z(x,\ y)$ определяется по ее значениям $z|_{\Gamma_1}=\varphi(x)$, $z_y(x,\ 0)=\nu(x)$, $-1\leqslant x\leqslant 1$. Для этой задачи с помощью явной функции Грина — Адамара также удается построить решение в замкнутой интегральной форме $z_2=F_2[x,\ y;\ \varphi(x);\ \nu(x)]$. Будем, наконец, считать, что значения $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\nu_2(x)$ $[\tau(x)=z(x,\ 0)]$, принесенные на линию перехода соответственно из областей D_1 и D_2, совпадают друг с другом ($\tau_1\equiv\tau_2$, $\nu_1\equiv\nu_2$ при $-1\leqslant x\leqslant 1$). Тогда, исключив из возникающих при этом соотношений функцию $\tau(x)$, придем окончательно к интегральному уравнению для $\nu(x)$:

$$\nu(x)+\lambda\overset{*}{\int_{-1}^{1}}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{1-sx}\right)\nu(s)\,ds=g(x). \tag{8.41}$$

Здесь $g(x)$ — известная функция, которая явно (в квадратурах) выражается через $f(x)$ и $\varphi(x)$, а $\pi\lambda(1+\sin\pi\beta)=\cos\pi\beta$, $2\beta(n+2)=n$. При этом интеграл, входящий в уравнение (8.41), понимается в смысле главного значения по Коши, что помечается звездочкой над знаком интеграла. Таким образом, (8.41) представляет собой сингулярное интегральное уравнение второго рода с особым ядром $K_0(x,\ s)$ типа Коши. Трикоми обратил это уравнение (при $n=1$) методом итераций. С. Геллерстедт [84] и С. Г. Михлин [41], [42] показали, что его решение может быть получено и более простым, основанным на теории аналитических функций, методом Карлемана. В классе функций $\nu(x)$, таких, что интегралы $\int_{-1}^{+1}|\nu(x)|\,\ln|x\pm 1|\,dx$ конечны, это решение единственно и дается формулой

$$\nu(x)=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[g(x)-\lambda\overset{*}{\int_{-1}^{1}}\left(\frac{1-s^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{n+2}}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{1-sx}\right)g(s)\,ds\right]. \tag{8.42}$$

Как показывают оценки, найденные для выражения $g(x)$ и интеграла в правой части формулы (8.42), если $f(x) \in C^0(\gamma_0)$, $\varphi(x) \in C^2(\Gamma_1)$, то равенство (8.42) определяет функцию $\nu(x)$, непрерывную и ограниченную внутри интервала $-1 < x < 1$, а также на его левом конце $x = -1$. Однако $\nu(x)$ при $x \to +1$ обращается в общем случае в бесконечность порядка $1/(n+2)$ *). Тем не менее наличие такой особенности не нарушает справедливости теорем единственности, доказанных для более широких классов функций R_α и Q.

Вычислив таким путем функцию $\nu(x)$, нетрудно затем найти $z(x, y)$ как в области D_1, так и в характеристическом треугольнике D_2 и тем самым полностью решить нормальную задачу Трикоми.

Эффективное обращение интегрального уравнения (8.41) дало возможность также доказать существование решения задачи Трикоми и для граничных контуров более общей формы. Так, например, было установлено [51], [84], что если достаточно гладкая кривая Γ_0 вблизи точек A_1 и A_2 оканчивается малыми дугами нормального контура γ_0, а в остальной части лежит вне γ_0, то задаче Трикоми будет также отвечать сингулярное интегральное уравнение вида (8.41), но на этот раз его ядро $K(x, s) = K_0(x, s) + K_1(x, s)$ содержит дополнительное слагаемое $K_1(x, s)$, конечное и непрерывное всюду в области $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$. Такое сингулярное уравнение с помощью формулы (8.42) может быть приведено к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого (в силу известной альтернативы Фредгольма) следует из единственности решения задачи Трикоми.

Аналогичная альтернативная аргументация (существование решения следует из его единственности) с успехом использовалась и при изучении задач Франкля (8.25), (8.26), (8.28) (см. [4], [11], [21], [65], [79], [96]). Не останавливаясь на перечислении других результатов, приведем подробную формулировку только для одной из полученных таким путем теорем существования [65], [96]. Положим, что кривая Γ_0 на рис. 6

---

*) Эта бесконечность исчезает только в частном случае, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ связаны друг с другом определенным интегральным соотношением (см. условие Трикоми на стр. 172 монографии [51]).

соединяет точки $A_1(-1, 0)$, $A_2(1, 0)$ и определена параметрическими уравнениями $x=x(s)$, $y=y(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$, причем $x(s)$ и $y(s)\in C^3(0, l)$ (s — длина дуги, отсчитываемая на Γ_0 от точки A_2 к A_1, а l — длина всей линии Γ_0). Будем считать, что Γ_0 лежит всюду вне нормального контура γ_0: $x^2+\frac{4}{9}y^3=1$ ($y\geqslant 0$) и только в некоторой достаточно малой окрестности точек A_1 и A_2 кривые Γ_0 и γ_0 совпадают. Потребуем также, чтобы на всем протяжении линии σ_1: $y=g(x)$ выполнялось условие $-M<g'(x)<0$ (M — некоторая положительная константа), причем пусть вблизи точки A_1 кривая σ_1 совпадает с куском характеристики Γ_1.

Теорема 8.5. *Если, кроме перечисленных требований, $K(y)\in C^3$ является монотонно возрастающей функцией, а $K(0)=0$, $K'(0)>0$, то существует решение $z(x, y)$ уравнения* (8.15), *квазирегулярное в области D и удовлетворяющее граничным условиям*

$$z|_{\Gamma_0}=f(s)\in C^2(0, l),\quad z|_{\sigma_1}=\varphi(s)\in C^4(\sigma_1),$$

где $(f)_{A_1}=(\varphi)_{A_1}$, $(f')_{A_1}=(\varphi')_{A_1}$. Следует заметить, что довольно стеснительные ограничения, наложенные здесь на Γ_0 и σ_1, не являются существенно необходимыми; так, например, даже в пределах метода интегральных уравнений теорему существования для эллиптической области D_1 удалось распространить на более общие граничные кривые [16], [59].

Другой подход к изучению вопросов существования содержится в работах [4], [38], [78], [86]. Здесь с помощью альтернирующего метода Шварца из разрешимости задачи Трикоми для нормальных областей устанавливается ее разрешимость для областей с более общим эллиптическим контуром Γ_0. При этом доказательство сходимости альтернирующего процесса существенно опирается на принцип экстремума, сформулированный выше для задачи T. Таким путем удалось показать, что существование решения проблемы Трикоми может быть обеспечено и без введения тех жестких требований, которые предъявляются к Γ_0, $f(x)$ и $\varphi(x)$ в методе интегральных уравнений.

При исследовании смешанных краевых задач оказался весьма плодотворным также и классический метод Грина, позволяющий свести рассматриваемую краевую проблему к задаче построения ее функции Грина [87].

2. Методы функционального анализа. Существенно новую трактовку проблемы существования дают методы функционального анализа [83], [89], [94]. Поясним принцип применения этих методов на примере задачи Франкля — Моравец (8.26) [94]. Рассматривая область D на рис. 7, будем полагать, что кривая Γ_0 имеет кусочно непрерывную касательную, а линия Γ_0^* — отображение дуги Γ_0 на плоскость (ξ, η) $\left(\xi = x, \ \eta = \int_0^y \sqrt{K(y)}\,dy\right)$ — звездообразна относительно начала координат, т. е. при перемещении вдоль Γ_0 против часовой стрелки выполняется условие

$$y^{-\frac{1}{2}}(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi) \geqslant k_0\,ds > 0,$$

где k_0 — некоторая положительная константа. Условимся считать также, что на σ_1 и σ_2 справедливы неравенства

$$K\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 \geqslant 0, \quad x\,dy > k_0\,ds > 0.$$

Потребуем, кроме того, чтобы функция $K(y)$ имела положительную производную $K'(y) > 0$ при $y > y_1$, $y_1 < 0$, и заметим, что однородное уравнение (8.15) с неоднородными краевыми условиями (8.26) может быть заменено неоднородным уравнением Чаплыгина

$$K(y)\,z_{xx} + z_{yy} = g(x, y) \tag{8.43}$$

с однородными (нулевыми) граничными условиями

$$z\,|_{\Gamma_0 + \sigma_1 + \sigma_2} = 0. \tag{8.44}$$

Введем, наконец, обозначения $u_1 = z_x$, $u_2 = z_y$ и вместо (8.43) рассмотрим эквивалентную систему уравнений первого порядка

$$(Lu)_1 = K(y)\,u_{1x} + u_{2y} = g(x, y), \quad (Lu)_2 = u_{1y} - u_{2x} = 0. \tag{8.45}$$

Тогда задача (8.45), (8.44) будет решена, если в области D будет найден вектор $u = (u_1, u_2)$, удовлетворяющий условиям

$$Lu = g \ \text{ в } \ D, \tag{8.46}$$

$$u_1\frac{dx}{ds} + u_2\frac{dy}{ds} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0 + \sigma_1 + \sigma_2, \tag{8.47}$$

где $g = (g, 0)$, а оператор Lu определяется формулами (8.45). Дальнейшие построения К. Моравец базируются на так называемом *слабом решении* задачи (8.46), (8.47). Для определения этого понятия рассмотрим гильбертово пространство U_* всех пар измеримых в области D функций $u=(u_1, u_2)$ с конечной нормой

$$\|u\|_* = \left[\iint_D (ru_1^2 + u_2^2)\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

скалярным произведением двух векторов $u=(u_1, u_2) \in U_*$ и $v=(v_1, v_2) \in U_*$ в этом пространстве является выражение

$$(u, v)_* = \iint_D (ru_1v_1 + u_2v_2)\,dx\,dy.$$

Введем еще в рассмотрения множество W всех пар непрерывно дифференцируемых функций $w=(w_1, w_2)$, обладающих следующими свойствами:

$$1)\ w=(0, 0) \text{ при } r=0;\ w_1=0 \text{ на линии } \Gamma_0+\sigma_1+\sigma_2, \tag{8.48а}$$

$$2)\ \sqrt{-K}\,w_1+w_2=0 \text{ на } \gamma_1;\ \sqrt{-K}\,w_1-w_2=0 \text{ на } \gamma_2, \tag{8.48б}$$

$$3)\ \iint_D \left[\frac{1}{r}(Lw)_1^2 + (Lw)_2^2\right]dx\,dy < \infty. \tag{8.48в}$$

Вектор $u \in U_*$ называется *слабым* (в смысле К. Моравец) *решением* задачи (8.46), (8.47), если для каждой функции $w \in W$ выполняется равенство

$$(w, g) = -(Lw, u), \tag{8.49}$$

где $(w, g) = \iint_D (w_1g_1 + w_2g_2)\,dx\,dy$. В случае непрерывной дифференцируемости слабого решения u из формулы (8.49) непосредственно следует, что $u=(u_1, u_2)$ удовлетворяет уравнению (8.46) и условию (8.47). Поэтому для того, чтобы доказать, что вектор $u=(u_1, u_2)$ является решением задачи (8.46), (8.47) в обычном смысле, достаточно установить следующие положения: 1) доказать, что слабое решение существует и единственно; 2) исследовать дифференциальные свойства слабого решения и проверить, удовлетворяет ли оно тем требованиям гладкости, которые предъявляются к строгим решениям в классическом («сильном») смысле (доказать теорему дифференцируемости слабого решения).

Первая задача этой программы является более легкой частью исследования и решается так.

Вводится вспомогательное гильбертово пространство $\mathfrak{T}$ всех пар измеримых функций $t=(t_1, t_2)$ с конечной нормой $\|t\|^*=\left[\iint\limits_D\left(\frac{1}{r}t_1^2+t_2^2\right)dx\,dy\right]^{\frac{1}{2}}<\infty$; в этом пространстве скалярное произведение векторов $t=(t_1, t_2)$ и $s=(s_1, s_2)$ определяется формулой

$$(t, s)^*=\iint\limits_D\left(\frac{1}{r}t_1s_1+t_2s_2\right)dx\,dy.$$

Это пространство $\mathfrak{T}$ содержит в себе подпространство W, а из (8.48в) следует также, что $Lw\in\mathfrak{T}$. Затем доказывается, что для всех $w\in W$ имеет место *энергетическое неравенство*

$$\|w\|_*\leqslant B\|Lw\|^*, \tag{8.50}$$

где B — некоторая не зависящая от w положительная константа. Из этой априорной оценки прежде всего следует единственность решения сопряженной задачи (уравнение $Lw=0$ имеет единственное решение $w\in W$). Наконец, присоединяя к (8.50) классические теоремы Рисса из теории гильбертова пространства, можно показать, что *для каждой функции $g\in\mathfrak{T}$ при введенных выше предпосылках действительно существует слабое решение задачи* (8.46), (8.47).

Эта слабая теорема существования К. Моравец была дополнена в работах [83] и [89], авторы которых доказали, что слабое решение $u=(u_1, u_2)$ является также и сильным (в смысле К. Фридрихса) решением задачи (8.46), (8.47). Аналогичным путем были установлены теоремы существования слабого решения для прямой задачи теории сопла Лаваля [70], а также для различных модификаций первой ударной задачи Франкля (8.28) [40] и для пространственной проблемы Трикоми [13].

Для ряда других смешанных краевых задач функциональная методика доказательства существования слабых решений была разработана Ю. М. Березанским [7], который получил энергетические неравенства в других нормах и для уравнений более общих, чем уравнение Чаплыгина.

3. Метод конечных разностей. Для целей приближенного вычисления решений смешанных краевых задач, а также в теоретических вопросах существования и единственности в ряде исследований использовался известный метод сеток. Так, в работах [15], [30], [39], [55], [75] для доказательства разрешимости задачи Трикоми строятся различные разностные схемы и выясняется, при каких условиях они сходятся к точному решению; здесь же оценивается и погрешность от замены точного дифференциального уравнения его конечноразностным аналогом. Кроме проблемы Трикоми, путем сеточной аппроксимации решений изучались также задача Франкля — Моравец [1], проблема Франкля о клине с головной ударной волной [101] и краевые задачи для смешанных областей, изображенных на рис. 9, *б* и 10 [30]. Для численного решения смешанных задач газовой динамики применялся и известный метод прямых [35], [74].

ГЛАВА IX

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

§ 1. Основные уравнения

Важным уравнением теории дифракции является волновое уравнение. О теории волнового и более общих уравнений второго порядка см. гл. II настоящего справочника, посвященную гиперболическим уравнениям. Здесь тоже будут рассмотрены некоторые задачи, описываемые волновым уравнением.

1. Уравнения Максвелла [45], [46], [82, гл. V], [95]. Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ — электрическая и магнитная индукции, ρ — плотность электрических зарядов, $\boldsymbol{j}$ — плотность тока проводимости, $\boldsymbol{j}_{\text{ст}}$ — плотность тока, порожденного сторонними э. д. с., c — скорость света в пустоте.

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_{\text{ст}}), \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}, \tag{9.2}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость. В случае однородной изотропной среды σ, μ и ρ — постоянные числа. В случае анизотропной среды (кристаллы) ε — симметричный тензор второго ранга, а σ и μ в большинстве случаев можно считать скалярами. Для пустоты $\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=0$.

Вдоль поверхности контакта S двух различных сред 1 и 2 должны выполняться краевые условия:

$$\left.\begin{aligned}
&(E_s)_1=(E_s)_2,\\
&(H_s)_1=(H_s)_2,\\
&(B_n)_1=(B_n)_2,\\
&(D_n)_1-(D_n)_2=4\pi\nu;
\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

через E_s, H_s обозначены касательные составляющие соответствующих векторов, через B_n и D_n — нормальные, причем нормаль к границе раздела проведена в сторону среды 1; через ν — поверхностная плотность зарядов на поверхности контакта.

При изучении электромагнитных волн часто считают колебания гармоническими:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0e^{-i\omega t},\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_0e^{-i\omega t}. \tag{9.4}$$

Уравнения Максвелла тогда принимают вид ($\rho=0$, $j_{\text{ст}}=0$):

$$\left.\begin{aligned}
&c\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_0=-i\omega(\varepsilon+4\pi\sigma i)\boldsymbol{E}_0,\\
&c\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0=i\omega\mu\boldsymbol{H}_0,\\
&\boldsymbol{D}_0=\varepsilon\boldsymbol{E}_0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D}_0=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}_0=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

2. Потенциалы электромагнитного поля [82, гл. V]. В случае однородной проводящей изотропной среды можно ввести векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал φ. Через них векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ выражаются по формулам:

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{9.6}$$

Между $\boldsymbol{A}$ и φ имеется следующая связь:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\varphi=0. \tag{9.7}$$

Потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\boldsymbol{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ст}},\\
&\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.
\end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

При изучении электромагнитного поля в пустоте ($\varepsilon=\mu=1$; $\sigma=0$) иногда весьма удобен так называемый *поляризационный потенциал* $\mathbf{\Pi}$. Если векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ выражаются через $\mathbf{\Pi}$ по формулам:

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \tag{9.9}$$

$$\varphi=-\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \tag{9.10}$$

$$\boldsymbol{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \tag{9.11}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \tag{9.12}$$

и вектор $\mathbf{\Pi}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}=0, \tag{9.13}$$

то $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла [82], [95].

3. Динамические уравнения теории упругости [50]. Пусть $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3 t)=(u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения упругого тела. Тензор

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{9.14}$$

называется *тензором деформации*. Вектор $\boldsymbol{t}^{(\nu)}$, представляющий собой плотность сил, действующих на элементарную площадку с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ с той стороны, куда направлена нормаль $\boldsymbol{\nu}$, называется *вектором напряжений*. Компоненты σ_{kl} векторов $\boldsymbol{t}^{(k)}=\sigma_{kl}\boldsymbol{i}_l$ образуют тензор напряжений ($\boldsymbol{i}_k$ — орт оси x_k; *здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование*). Тензор σ_{kl} симметричен.

В случае идеально упругого анизотропного тела тензор σ_{kl} линейно выражается через тензор ε_{ij} (закон Гука):

$$\sigma_{kl}=a_{klij}(x_1, x_2, x_3)\,\varepsilon_{ij}, \tag{9.15}$$

где четырехвалентный тензор a_{klij} удовлетворяет условиям:

а) $$a_{klij}=a_{lkij}=a_{klji}=a_{ijkl}, \tag{9.16}$$

б) для любых ε_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), одновременно не равных нулю,

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}a_{klij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}>0. \tag{9.17}$$

В случае изотропного тела закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{u}) \tag{9.18}$$

(здесь λ и μ — параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера) *).

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют следующим уравнениям движения:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3); \tag{9.19}$$

здесь X_i — компоненты вектора объемных сил, ρ — плотность упругой среды.

В случае однородной изотропной среды уравнения теории упругости имеют вид

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mu\,\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} = \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}. \tag{9.20}$$

На поверхности S упругого тела чаще всего задается вектор смещений (первая краевая задача)

$$\boldsymbol{u}|_S = \boldsymbol{f}(x,\ y,\ z) \tag{9.21}$$

или вектор напряжений (вторая краевая задача)

$$\boldsymbol{t}^{(\nu)}|_S = \boldsymbol{F}(x,\ y,\ z). \tag{9.22}$$

Иногда задаются нормальная составляющая вектора смещения $\boldsymbol{u}$ и касательная составляющая вектора $\boldsymbol{t}^{(\nu)}$. На поверхности, разделяющей два упругих тела в случае жесткого контакта, должны выполняться условия

$$(\boldsymbol{u})_1 = (\boldsymbol{u})_2, \quad (\boldsymbol{t}^{(\nu)})_1 = (\boldsymbol{t}^{(\nu)})_2; \tag{9.23}$$

в случае, когда на поверхности контакта отсутствует трение,

$$(u_\nu)_1 = (u_\nu)_2, \quad (t_\nu^{(\nu)})_1 = (t_\nu^{(\nu)})_2, \qquad (t_S^{(\nu)})_1 = (t_S^{(\nu)})_2 = 0. \tag{9.24}$$

Здесь u_ν — нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{u}$, $t_S^{(\nu)}$ — касательная составляющая вектора $\boldsymbol{t}^{(\nu)}$, $t_\nu^{(\nu)}$ — его нормальная составляющая.

4. Потенциалы в теории упругости [95]. Пусть вектор объемных сил $\boldsymbol{X}$ представлен в виде суммы:

$$\boldsymbol{X} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\boldsymbol{L}; \tag{9.25}$$

*) Символ Кронекера: $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$.

тогда любое решение $\boldsymbol{u}$ системы уравнений (9.20) можно представить в виде

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \qquad (9.26)$$

где

$$\varphi_{tt} - a^2 \Delta\varphi = \frac{1}{\rho}\Phi, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad (9.27)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{tt} - b^2 \Delta\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{L}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \qquad (9.28)$$

В плоском случае $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y, t)$; $u_3 \equiv 0$; формулы (9.26) превращаются в формулы

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \varphi(x, y, t) + \operatorname{rot}(\psi(x, y, t)\boldsymbol{k})$$

($\boldsymbol{k}$ — орт оси Oz) или

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (9.29)$$

Функция φ называется *продольным потенциалом* или *потенциалом продольных волн,* вектор $\boldsymbol{\psi}$ (или функция ψ в плоском случае) — *поперечным потенциалом или потенциалом поперечных волн.*

§ 2. Плоские волны

1. Плоские волны для волнового уравнения. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция вида

$$u = f(at - \alpha_i x_i), \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1, \quad \alpha_i = \text{const}, \qquad (9.30)$$

является решением волнового уравнения

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = \Delta u, \qquad (9.31)$$

какова бы ни была функция f. Решение вида (9.31) называется *плоской волной.*

2. Плоские волны для уравнений Максвелла [46], [95]. Для уравнений Максвелла в однородной изотропной среде решение типа плоской волны рассматривают обычно для случая гармонических колебаний. Полагая в уравнениях

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_1 e^{i(\boldsymbol{kr})}, \quad \boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{H}_1 e^{i(\boldsymbol{kr})} \quad (\boldsymbol{k}=(k_x, k_y, k_z), \quad \boldsymbol{r}=(x, y, z)), \tag{9.32}$$

получим соотношения

$$\omega\mu\boldsymbol{H}_1=c(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_1), \quad \omega\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1=-c(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_1) \tag{9.33}$$

$$(\varepsilon_1=\varepsilon+4\pi\sigma i),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} k^2=\varepsilon_1\mu\frac{\omega^2}{c^2}, \quad H_1^2=\frac{\varepsilon_1}{\mu}E_1^2, \\ \boldsymbol{kE}_1=\boldsymbol{kH}_1=\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{H}_1=0. \end{aligned}\right\} \tag{9.34}$$

Для немагнитной ($\mu=1$) и прозрачной ($\sigma=0$) анизотропной среды, когда роль диэлектрической постоянной играет тензор ε, плоские волны имеют вид:

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_1 e^{i\boldsymbol{kr}}, \quad \boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{H}_1 e^{i\boldsymbol{kr}}, \quad \boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{D}_1 e^{i\boldsymbol{kr}}, \quad \boldsymbol{D}_1=\varepsilon\boldsymbol{E}_1, \tag{9.35}$$

$$\boldsymbol{H}_1=[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{E}_1], \quad \boldsymbol{D}_1=-[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{H}_1]=[\boldsymbol{n}, [\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{n}]]=\varepsilon\boldsymbol{E}_1, \tag{9.36}$$

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{n}, \quad (n^2\delta_{ik}-n_i n_k-\varepsilon_{ik})E_{ik}=0, \tag{9.37}$$

δ_{ik} — символ Кронекера.

Связь между направлением вектора $\boldsymbol{n}$ и его величиной дается уравнением Френеля

$$\det(n^2\delta_{ik}-n_i n_k-\varepsilon_{ik})=0 \tag{9.38}$$

или, если тензор ε_{ik} приведен к главным осям,

$$\begin{aligned} n^2(\varepsilon_1 n_1^2+\varepsilon_2 n_2^2+\varepsilon_3 n_3^2)-[n_1^2\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_3)+ \\ +n_2^2\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+n_3^2\varepsilon_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=0. \end{aligned} \tag{9.39}$$

3. Плоские волны в теории упругости [95]. Для уравнений теории упругости решения типа плоской волны имеют вид:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}f(at-n_i x_i), \quad |\boldsymbol{n}|=1, \quad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{9.40}$$

(продольная плоская волна),

$$\left.\begin{aligned} u = lf(bt - n_i x_i), \quad |n| = 1, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \\ l \perp n, \quad l, n = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{9.41}$$

(поперечная плоская волна). Вид функции f здесь произволен.

Функцию f и величины n_1, n_2, n_3 не обязательно считать вещественными. Особенно важный случай мы получим, если положим $f(x) = e^{i\frac{\omega}{a}x}$ в формулах (9.30) и (9.40), $f(x) = e^{i\frac{\omega}{b}x}$ — в формуле (9.41). При таком выборе $f(x)$ мы получаем гармонические плоские волны с частотой ω. Естественно, что в случае невещественных f и n_i физический смысл надо приписывать только вещественной или мнимой части векторов или скаляров, описывающих волновое поле.

4. Отражение и преломление плоских волн в случае волнового уравнения. Пусть волновой процесс в среде 1, где $y \geqslant 0$, описывается волновым уравнением

$$u_{tt} = a_1^2 (u_{xx} + u_{yy}), \tag{9.42}$$

а в среде 2, где $y \leqslant 0$, — уравнением

$$u_{tt} = a_2^2 (u_{xx} + u_{yy}). \tag{9.43}$$

Пусть на границе раздела двух сред выполняются краевые условия

$$(u)_1 = (u)_2, \quad \alpha_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 = \alpha_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2. \tag{9.44}$$

Одна плоская (падающая) волна

$$u_{\text{пад}} = f\left(t - \theta x + \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2}\, y\right),$$

$\theta = \text{const}$, двигающаяся в среде 1 к границе, не удовлетворяет краевым условиям. Составим следующую функцию:

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} \quad (y \geqslant 0), \qquad u = u_{\text{прел}} \quad (y \leqslant 0), \tag{9.45}$$

где через $u_{\text{отр}}$ обозначена отраженная волна:

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{отр}} &= Af\left(t - \theta x - y\sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2}\right), \\ A &= \frac{\alpha_1\sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2} - \alpha_2\sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \theta^2}}{\alpha_1\sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2} + \alpha_2\sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \theta^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{9.46}$$

а через $u_{\text{прел}}$ — преломленная волна:

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{прел}} &= Bf\left(t - \theta x + y\sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \theta^2}\right), \\ B &= \frac{2\alpha_1\sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2}}{\alpha_1\sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2} + \alpha_2\sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \theta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.47}$$

Функция (9.45) уже удовлетворяет краевым условиям (9.44). Для вещественности падающей волны нужно, чтобы $\frac{1}{\theta} > a_1$. Если $a_2 > \frac{1}{\theta} > a_1$, то преломленную и отраженную волны естественно считать комплексными, а функцию f — регулярной в верхней (нижней) полуплоскости. В этом случае в формулах (9.46), (9.47) нужно полагать

$$\sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \theta^2} = i\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}\left(= -i\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}\right).$$

5. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн [46]. Пусть электромагнитная плоская монохроматическая волна падает из среды 1 на границу раздела двух сред 1 и 2. Обе среды предполагаем прозрачными ($\sigma = 0$) и немагнитными ($\mu = 1$).

Если θ_0 — острый угол между нормалью к фронту (т. е. лучом) и нормалью к поверхности (т. е. θ_0 — угол падения), θ_1 и θ_2 — аналогичные углы соответственно для отраженной и преломленной волн (θ_1 — угол отражения, θ_2 — угол преломления), то

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}, \tag{9.48}$$

ε_1 (ε_2) — диэлектрическая постоянная для среды 1 (среды 2).

Пусть вектор $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{\text{пад}}$ в падающей волне перпендикулярен к плоскости падения *), тогда электрические векторы в отраженной и преломленной волнах $\boldsymbol{E}_{\text{отр}}$ и $\boldsymbol{E}_{\text{прел}}$ будут параллельны $\boldsymbol{E}_{\text{пад}}$, причем имеют место *формулы Френеля*

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{\text{отр}} &= \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \boldsymbol{E}_{\text{пад}}, \\ \boldsymbol{E}_{\text{прел}} &= \frac{2\cos\theta_0 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \boldsymbol{E}_{\text{пад}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.49}$$

Векторы $\boldsymbol{H}_{\text{пад}}$, $\boldsymbol{H}_{\text{отр}}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{прел}}$ нетрудно выразить через $\boldsymbol{E}_{\text{пад}}$, используя соотношения (9.33) и (9.34).

В том случае, когда вектор $\boldsymbol{H}_{\text{пад}}$ перпендикулярен к плоскости падения, то же будет относиться к векторам $\boldsymbol{H}_{\text{отр}}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{прел}}$, причем имеют место формулы Френеля

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_{\text{отр}} &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} \boldsymbol{H}_{\text{пад}}, \\ \boldsymbol{H}_{\text{прел}} &= \frac{\sin 2\theta_2}{\sin(\theta_0 + \theta_2)\cos(\theta_0 - \theta_2)} \boldsymbol{H}_{\text{пад}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.50}$$

Векторы $\boldsymbol{E}_{\text{пад}}$, $\boldsymbol{E}_{\text{отр}}$ и $\boldsymbol{E}_{\text{прел}}$ нетрудно выразить через $\boldsymbol{H}_{\text{пад}}$, используя соотношения (9.33) и (9.34).

6. Отражение плоских упругих волн от свободной границы [95]. При рассмотрении плоских волн в теории упругости естественно рассматривать задачу как плоскую и считать, что потенциалы φ и ψ являются функциями типа плоской волны.

Пусть граница $y = 0$ полуплоскости $y \geqslant 0$ свободна от напряжений и на нее падает плоская продольная волна, описывающаяся потенциалом

$$\varphi_{\text{пад}} = f\left(t - \theta x + y\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\right), \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{9.51}$$

---

*) *Плоскостью падения* называется плоскость, проходящая через падающий луч и нормаль к поверхности, проведенную через точку пересечения поверхности с падающим лучом.

Выпишем потенциалы отраженных продольной и поперечной волн:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\text{отр}} &= Af\left(t - \theta x - y\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\right),\\ \psi_{\text{отр}} &= Bf\left(t - \theta x - y\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{9.52}$$

$$\left.\begin{aligned}A &= \frac{-\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}{\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}},\\ B &= \frac{4\theta\left(\frac{1}{b^2} - 2\theta^2\right)\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}}{\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{9.53}$$

Пусть на границу $y = 0$ падает поперечная волна с потенциалом

$$\psi_{\text{пад}} = f\left(t - \theta x + y\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\right). \tag{9.54}$$

Для отраженных волн имеем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\text{отр}} &= Cf\left(t - \theta x - y\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\right),\\ \psi_{\text{отр}} &= Df\left(t - \theta x - y\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{9.55}$$

$$\left.\begin{aligned}C &= \frac{-4\theta\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\left(\frac{1}{b^2} - 2\theta^2\right)}{\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}},\\ D &= \frac{-\left(\frac{1}{b^2} - 2\theta^2\right)^2 + 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}{\left(2\theta^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{9.56}$$

В случае, когда $\frac{1}{a} < \theta < \frac{1}{b}$, отраженные волны будут комплексными. Функцию f нужно считать в этом случае регулярной в верхней (нижней) полуплоскости, если

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}=-i\left|\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a^2}}\right| \quad \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}=i\left|\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a^2}}\right|\right).$$

Приведем еще одно важное решение уравнений теории упругости, связанное с комплексными плоскими волнами и удовлетворяющее условию отсутствия напряжений при $y=0$.

Пусть $f(z)$ регулярна в верхней полуплоскости и

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= Ef\left(t-\theta x+i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a^2}}y\right), \\ \psi &= Ff\left(t-\theta x+i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{b^2}}y\right). \end{aligned}\right\} \tag{9.57}$$

Если потребовать, чтобы напряжения при $y=0$ отсутствовали, то для E и F получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} E\left(\frac{1}{b^2}-2\theta^2\right)+2Fi\theta\sqrt{\theta^2-\frac{1}{b^2}}&=0, \\ -2Ei\theta\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a^2}}+F\left(\frac{1}{b^2}-2b^2\right)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{9.58}$$

Приравняв нулю определитель, получаем:

$$\left(\frac{1}{b^2}-2\theta^2\right)^2-4\theta^2\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a^2}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{b^2}}=0. \tag{9.59}$$

Это уравнение, называемое обычно *уравнением Рэлея*, имеет два вещественных корня $+\frac{1}{c}$ и $-\frac{1}{c}$, причем $a>b>c$. Величина c называется *скоростью волн Рэлея*. Если функция $f(z)$ быстро затухает при увеличении $\operatorname{Im} z$, то колебания заметно отличны от нуля только вблизи поверхности полупространства. Эти волны, распространяющиеся в окрестности поверхности полупространства и быстро затухающие с глубиной, называются *волнами Рэлея*. Сам Рэлей рассматривал случай $f(z)=e^{i\omega z}$.

Важная задача об отражении и преломлении плоских волн на границе $y=0$, если области $y>0$ и $y<0$ представляют собой два однородных изотропных полупространства, здесь не будет рассмотрена ввиду своей громоздкости [26], [27].

§ 3. Точечные источники колебаний для уравнений теории упругости и уравнений Максвелла в случае неограниченного пространства. Задача Коши для уравнений теории упругости *)

1. Точечные источники колебаний в теории упругости [4], [5], [50], [95]. Пусть на бесконечное пространство, заполненное однородной изотропной упругой средой, действует сосредоточенная сила, приложенная в точке (x_0, y_0, z_0) и направленная параллельно оси Ox. Пусть по величине эта сила равна нулю при $t<0$ и $\chi(t)$ при $t>0$. Соответствующий такой силе вектор упругих смещений $\boldsymbol{u}=(u, v, w)$ определяется следующими формулами Стокса:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2}\int\limits_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}} t'\chi(t-t')\,dt + \frac{1}{4\pi\rho r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \times \\ &\times\left[\frac{1}{a^2}\chi\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}\chi\left(t-\frac{r}{b}\right)\right]+\frac{1}{4\pi\rho b^2 r}\chi\left(t-\frac{r}{b}\right), \\ v &= \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\,\partial y}\int\limits_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}} t'\chi(t-t')\,dt' + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\left[\frac{1}{a^2}\chi\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}\chi\left(t-\frac{r}{b}\right)\right], \\ w &= \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\,\partial z}\int\limits_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}} t'\chi(t-t')\,dt' + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\left[\frac{1}{a^2}\chi\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}\chi\left(t-\frac{r}{b}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (9.60)$$

Введем обозначения: $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$. Если сосредоточенная сила действует в направлении оси x_k и $\chi(t)=\delta(t)$,

---

*) О точечных источниках колебаний и о решении задачи Коши в случае волнового уравнения см. гл. II.

то для соответствующего вектора смещения $\boldsymbol{h}_k$ получаем:

$$\boldsymbol{h}_k(x_j - x_j^0, t) = \frac{1}{4\pi\rho a^2 r}\frac{\partial r}{\partial x_k}\operatorname{grad} r\delta(\gamma_a) + \frac{r}{4\pi\rho a}\operatorname{grad}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_k}\varepsilon(\gamma_a) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi\rho}\operatorname{grad}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_k}\gamma_a\varepsilon_a + \frac{\left(\boldsymbol{i}_k - \frac{\partial r}{\partial x_k}\operatorname{grad} r\right)}{4\pi\rho b^2 r}\delta(\gamma_b) +$$
$$+ \left(-\frac{r}{4\pi\rho b}\operatorname{grad}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_k}\right)\varepsilon(\gamma_b) + \frac{1}{4\pi\rho}\operatorname{grad}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_k}\gamma_b\varepsilon(\gamma_b). \quad (9.61)$$

Здесь

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2},$$

$$\gamma_a = t - \frac{r}{a}, \quad \gamma_b = t - \frac{r}{b}, \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Компоненты h_{ks} векторов $\boldsymbol{h}_k$ образуют симметричный тензор $H = \|h_{ks}\|$, играющий для уравнений теории упругости ту же роль, что фундаментальное решение h для волнового уравнения.

В плоском случае фундаментальный тензор образуют составляющие векторов $\boldsymbol{h}_k$ (имеющих тот же физический смысл, что и в трехмерном случае):

$$\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{h}_{ka}\varepsilon(\Gamma_a) + \boldsymbol{h}_{kb}\varepsilon(\Gamma_b),$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1; & x \geqslant 0, \quad \Gamma_a = t^2 - \frac{r^2}{a^2}, \\ 0; & x < 0, \quad \Gamma_b = t^2 - \frac{r^2}{b^2}, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2},$$

$$\boldsymbol{h}_{ka} = \boldsymbol{\alpha}_{0k}\frac{1}{\sqrt{\Gamma_a}} + \boldsymbol{\alpha}_{1k}\sqrt{\Gamma_a}, \quad \boldsymbol{h}_{kb} = \boldsymbol{\beta}_{0k}\frac{1}{\sqrt{\Gamma_b}} + \boldsymbol{\beta}_{1k}\sqrt{\Gamma_b},$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{01} &= \frac{(x_1 - x_1^0)\,[(x_1 - x_1^0)\,\boldsymbol{l}_1 + (x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_2]}{2\pi\rho a^2 r^2}, \\
\alpha_{11} &= \frac{[(x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2]\,\boldsymbol{l}_1 + 2(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_2}{2\pi\rho r^4}, \\
\alpha_{02} &= \frac{(x_2 - x_2^0)\,[(x_1 - x_1^0)\,\boldsymbol{l}_1 + (x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_2]}{2\pi\rho a^2 r^2}, \\
\alpha_{12} &= \frac{2(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_1 - [(x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2]\,\boldsymbol{l}_2}{2\pi\rho r^4}, \\
\beta_{01} &= \frac{(x_2 - x_2^0)\,[(x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_1 - (x_1 - x_1^0)\,\boldsymbol{l}_2]}{2\pi\rho b^2 r^2}, \\
\beta_{11} &= \frac{[(x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2]\,\boldsymbol{l}_1 + 2(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_2}{-2\pi\rho r^4}, \\
\beta_{02} &= \frac{(x_1 - x_1^0)\,[-(x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_1 + (x_1 - x_1^0)\,\boldsymbol{l}_2]}{2\pi\rho b^2 r^2}, \\
\beta_{12} &= \frac{-2(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_1 + [(x_1 - x_1^0)\,i_1 - (x_2 - x_2^0)\,\boldsymbol{l}_2]}{2\pi\rho r^4}.
\end{aligned}\right\} \quad (9.62)$$

Здесь $\boldsymbol{l}_k$ — орт оси x_k.

Решение задачи Коши для уравнений теории упругости

$$\rho\boldsymbol{u}_{tt} - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \mu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{X}(M, t), \quad (9.63)$$

$$\boldsymbol{u}\,|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}_t\,|_{t=0} = \boldsymbol{u}_1,$$

с помощью фундаментального тензора можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(t_0, M_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} \int\limits_{r \leqslant at_0} H(t_0, M_0 - M)\,\boldsymbol{u}_0(M)\,dM + \\
+ \int\limits_{r \leqslant at_0} H(t_0, M_0 - M)\,\boldsymbol{u}_1(M)\,dM + \\
+ \int\limits_{\substack{\frac{r}{a} \leqslant t_0 - t \\ t \geqslant 0}} H(t_0 - t, M_0 - M)\,\boldsymbol{X}(M, t)\,dM. \quad (9.64)
\end{aligned}$$

Формула (9.64) верна как в плоском, так и в трехмерном случае. Под Hf здесь понимается вектор с компонентами $(Hf)_j = h_{jk}f_k$. В трехмерном случае компоненты тензора H имеют δ-образные особенности (см. формулы (9.61)). Интегралы в формуле (9.64) следует понимать так, как предписывает теория обобщенных функций [22].

2. Осциллятор [37], [82], [95]. Физически осциллятор представляет собою сосредоточенный в точке (x_0, y_0, z_0) диполь с моментом $\boldsymbol{P}_0 f(t)$, $\boldsymbol{P}_0$ — единичный вектор, определяющий направление диполя, $f(t)$ — заданная функция.

Осциллятору соответствует

$$j_{\text{ст}} = \boldsymbol{P}_0 f'(t)\,\delta(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0), \tag{9.65}$$

$$\rho = f(t)\frac{\partial\delta}{\partial p_0}.$$

Если ввести сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в той точке, куда помещен осциллятор, и направить ось z вдоль вектора $\boldsymbol{P}_0$, то для компонент векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в случае пустоты $(\sigma = 0,\ \varepsilon = \mu = 1)$ мы получим:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{2\cos\theta}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial r},\\ E_\theta &= \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\right), \quad E_\varphi = 0,\\ H_r &= 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\varphi = -\sin\theta\,\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r\,\partial t},\\ \Pi_0 &= \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{9.66}$$

Поляризационный потенциал $\boldsymbol{\Pi}$ (см. § 1) при этом равен

$$\boldsymbol{\Pi} = \Pi_0 \boldsymbol{P}_0.$$

§ 4. Установившиеся колебания

1. Волновое уравнение [21], [43], [44], [78], [79, т. IV], [81], [82], [101]. Часто приходится рассматривать задачи дифракции установившихся колебаний, когда зависимость от времени функции u, описывающей волновое поле, является гармонической, т. е.

$$u(M,\ t) = v(M)\,e^{-i\omega t}. \tag{9.67}$$

Из того, что функция u удовлетворяет волновому уравнению, вытекает уравнение для v:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}. \tag{9.68}$$

Уравнение (9.68) называется *уравнением Гельмгольца* (см. гл. IV).

Пусть функция $v(x, y)$ задана вне некоторого круга $x^2+y^2 \leqslant b^2$ и удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Говорят, что v удовлетворяет *условиям излучения,* если при $r=\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$

$$v=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial r}-ikv=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right); \tag{9.69}$$

в трехмерном случае условия (9.69) заменяются на условия

$$v=O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial r}-ikv=o\left(\frac{1}{r}\right)\,^{*)}. \tag{9.70}$$

Физический смысл условий излучения — отсутствие волн, приходящих из бесконечности. Показано [21], что первые из приводимых здесь условий (9.69) и (9.70) являются следствием вторых.

Важную роль играют решения уравнения

$$\Delta v+k^2 v=\begin{cases} -\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) & \text{— трехмерный случай,} \\ -\delta(x-x_0, y-y_0) & \text{— плоский случай} \end{cases} \tag{9.71}$$

(δ — δ-функция Дирака), удовлетворяющие условиям излучения соответственно (9.70) или (9.69) и определенные во всем пространстве. Эти решения имеют физический смысл точечных источников гармонических колебаний. В плоском случае

$$v=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr), \quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{9.72}$$

здесь $H_0^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля. В трехмерном случае

$$v=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}. \tag{9.73}$$

Для уравнения Гельмгольца корректны внешние задачи Дирихле и Неймана.

---

*) Через $O(r^\alpha)$ мы обозначаем функцию, имеющую при $r \to +\infty$ оценку $|O(r^\alpha)| \leqslant Mr^\alpha$, $M=\text{const}$, и через $o(r^\alpha)$ — функцию такую, что отношение $o(r^\alpha)$: $r^\alpha \to 0$ равномерно относительно направления радиуса-вектора r.

Внешняя задача Дирихле — это задача отыскания функции v вне некоторой конечной области, ограниченной поверхностью (или кривой в плоском случае) S, причем:

$$\begin{aligned} &1) \qquad \Delta v + k^2 v = 0, \\ &2) \qquad v|_S \text{ задана}, \\ &3) \qquad v \text{ удовлетворяет условиям излучения.} \end{aligned} \tag{9.74}$$

Внешняя задача Неймана ставится таким же образом, с той лишь разницей, что условие 2) заменяется на условие

$$2) \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S \text{ задана.} \tag{9.75}$$

К внешним задачам Дирихле и Неймана сводится задача дифракции от ограниченного тела, если на поверхности этого тела выполняются условия $v\Big|_S = 0$ или $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0$.

Задача дифракции плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox от тела, ограниченного поверхностью S, ставится как задача нахождения функции v вне S по условиям:

$$\left.\begin{aligned} &1) \qquad \Delta v + k^2 v = 0, \\ &2) \qquad v\Big|_S = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0, \\ &3) \qquad v = e^{ikx} + v^*, \end{aligned}\right\} \tag{9.76}$$

причем v^* удовлетворяет условиям излучения.

Задача дифракции волны, возникшей от точечного источника, ставится точно так же, с тем лишь изменением, что условие 3) заменяется на условие

$$v = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) + v^*, \quad r = |PQ|, \tag{9.77}$$

в плоском случае и на условие

$$v = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + v^*, \quad r = |PQ|, \tag{9.78}$$

— в трехмерном.

Q — здѐсь фиксированная точка, в которой помещен точечный источник, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля. Функция v^* удовлетворяет условиям излучения и не имеет особых точек.

Решение $G(P, Q, k^2)$ задачи о дифракции волны, возникшей от точечного источника, называется *функцией Грина.*

Для любого решения v уравнения Гельмгольца, определенного вне S и удовлетворяющего условиям излучения, имеет место формула

$$u(Q) = \int\limits_S \left(G(P, Q) \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS; \tag{9.79}$$

нормаль направлена внутрь тела, ограниченного поверхностью S. Если $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ задана, $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0$, то формула (9.79) дает решение задачи Неймана; если $u|_S$ задана, $G|_S = 0$, то получим решение задачи Дирихле.

Корректны также задачи дифракции, когда конечная поверхность S разграничивает две среды: внешнюю, где искомая функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta v + k^2 v = 0, \tag{9.80}$$

и внутреннюю, где выполняется уравнение

$$\Delta v_1 + k_1^2 v_1 = 0, \tag{9.81}$$

причем на границе сред S выполняются краевые условия

$$\left.\begin{aligned} v|_S &= v_1|_S, \\ p \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S &= q \left.\frac{\partial v_1}{\partial n}\right|_S, \qquad p > 0, \quad q > 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.82}$$

Задача дифракции в этом случае ставится следующим образом: найти функции v вне S и v_1 внутри S, причем должны выполняться уравнения (9.80), (9.81) и краевые условия (9.82); кроме того, в случае дифракции плоской волны

$$v = e^{+ikx} + v^*,$$

где v^* удовлетворяет условиям излучения, а в случае дифракции от точечного источника, расположенного вне S, должны иметь место условия (9.77) или (9.78), где v^* удовлетворяет условиям излучения и не имеет особых точек.

Можно рассмотреть также случай внутреннего источника, тогда

$$v_1 = \frac{e^{+ik_1 r}}{4\pi r} + v_1^*, \qquad r = |PQ|, \quad Q \text{ внутри } S,$$

причем v_1^* не имеет особых точек, v удовлетворяет условиям излучения и на границе S выполняются краевые условия (9.82).

Корректность постановки задач теории дифракции доказывается методами теории потенциала и интегральных уравнений [43], [73], [79, т. IV], [140].

Постановка и доказательство корректности задач теории дифракции в случае тел с бесконечной границей представляют большие математические трудности. Можно сформулировать принцип излучения так, что он будет применим практически ко всем задачам дифракции установившихся колебаний.

При $\varepsilon > 0$ и при обычных краевых условиях существует единственное ограниченное на бесконечности решение уравнения

$$\Delta u_\varepsilon + (k^2 + \varepsilon i) u_\varepsilon = 0.$$

За решение задачи дифракции берут предел

$$u = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon.$$

В случае, когда граница области конечна, полученное таким образом решение будет удовлетворять условиям излучения (9.69) или (9.70).

Описанный принцип выделения единственного решения из всего множества решений уравнения Гельмгольца носит название *принципа предельного поглощения.*

Другой принцип, обобщающий обычный принцип излучения, носит название *принципа предельной амплитуды.* Он заключается в том, что решение уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -F(P)$$

должно быть пределом при $t \to +\infty$ произведения $u(P,t)\, e^{+i\omega t}$, где $u(P, t)$ есть решение уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -F(P)\, e^{-i\omega t},$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Замечание. Если мы будем рассматривать решение волнового уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u$, зависящее от t по закону

$$u(M, t) = e^{+i\omega t} v(M),$$

то для v будет выполняться уравнение Гельмгольца. Условия же излучения, принцип предельного поглощения и принцип предельной амплитуды сохраняют свой вид, с той лишь оговоркой, что везде i нужно заменить на $-i$.

2. О постановке задач теории дифракции электромагнитных колебаний [43]. В том случае, когда зависимость от времени компонент векторов, описывающих электромагнитное поле, выражается формулами (9.4), уравнения Максвелла принимают вид (9.5).

Пусть область внутри некоторой конечной замкнутой поверхности занята средой, характеризующейся постоянными ε_1, μ_1, σ_1. Для внешней области соответствующие константы пусть будут ε, μ ($\sigma=0$; ε, $\mu=\text{const}$). Задачи теории дифракции ставятся следующим образом.

Пусть векторы $\boldsymbol{E}_{\text{пад}}$, $\boldsymbol{H}_{\text{пад}}$ заданы вне S и характеризуют падающую волну ($\boldsymbol{E}_{\text{пад}}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{пад}}$ могут соответствовать, например, плоской волне или сосредоточенному диполю с моментом, зависящим от времени по закону $P(t)=\text{const}\cdot e^{-i\omega t}$).

Решение задачи дифракции вне S ищется в виде

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\text{пад}}+\boldsymbol{E}^*, \quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{\text{пад}}+\boldsymbol{H}^*,$$

причем векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют уравнениям (9.5), вне и внутри S и на границе удовлетворяют обычным краевым условиям (9.3), а каждая компонента векторов $\boldsymbol{E}^*$ и $\boldsymbol{H}^*$, кроме того, удовлетворяет условиям излучения (9.69) или (9.70) в плоском случае (причем i надо заменить там на $-i$), где $k=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}$ и E^*, H^* не имеют особых точек.

Можно рассматривать также случай внутреннего источника, тогда

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\text{пад}}+\boldsymbol{E}_1, \quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{\text{пад}}+\boldsymbol{H}_1$$

внутри замкнутой поверхности S, $\boldsymbol{E}_{\text{пад}}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{пад}}$ характеризуют источник колебаний, $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{H}_1$ не имеют особых точек, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют вне S тем же условиям излучения и на S тем же краевым условиям, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в предыдущем случае.

3. О постановке задач теории дифракции упругих колебаний [43]. Задачи теории дифракции упругих колебаний ставятся аналогично соответствующим задачам теории электромагнитных колебаний. Пусть

$$\boldsymbol{u}(M,\ t)=\boldsymbol{v}_{\text{пад}}(M)\,e^{i\omega t}$$

— вектор смещений, соответствующий падающей волне, а S — конечная замкнутая поверхность, внутри которой параметры Ламе равны λ_1 и μ_1 и плотность равна ρ_1 ($\lambda_1, \mu_1, \rho_1 = \text{const}$), а вне которой — равны λ, μ и ρ ($=\text{const}$).

Решение задачи дифракции вне S ищется в виде

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v}_{\text{пад}}(M)+\boldsymbol{v}^*(M))\,e^{i\omega t},$$

причем на S выполняются краевые условия (9.23) или (9.24), $\boldsymbol{v}^*$ не имеет особых точек, кроме того, предполагается, что $\boldsymbol{v}^*$ удовлетворяет следующему условию, играющему здесь роль условий излучения:

$$\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2,$$

причем

$$\Delta\boldsymbol{w}_1+k_1^2\boldsymbol{w}_1=0,\quad \operatorname{rot}\ \boldsymbol{w}_1=0,\quad k_1=\frac{\omega}{a};$$

$$\Delta\boldsymbol{w}_2+k_2^2\boldsymbol{w}_2=0,\quad \operatorname{div}\ \boldsymbol{w}_2=0,\quad k_2=\frac{\omega}{b}.$$

Компоненты векторов $\boldsymbol{w}_j$ ($j=1,\ 2$) должны удовлетворять условиям излучения (9.69) или (9.70), причем вместо k там должно стоять k_j ($j=1,\ 2$). В случае источника, расположенного внутри S,

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v}_{\text{пад}}+\boldsymbol{v}_1)\,e^{i\omega t},$$

$\boldsymbol{v}_1$ не имеет особых точек, вне S удовлетворяет условиям излучения и на S — обычным краевым условиям.

§ 5. Точечные источники для полуплоскости и полупространства

1. Волновое уравнение, плоский случай. Решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}-a^2\Delta u=\delta(x-x_0,\ y-y_0)\,\omega(t), \qquad y_0>0,\\ &u|_{y=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0,\quad u|_{t=0}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.83)$$

легко находится методом отражений, причем для u получается формула

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{t-\frac{r}{a}} \frac{\omega(\tau)\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} - \\ - \frac{1}{2\pi a} \int_0^{t-\frac{r}{a}} \frac{\omega(\tau)\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r_*^2}}, \qquad (9.84)$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad r_* = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2};$$

в тех точках, где $t - \frac{r}{a} < 0$ или $t - \frac{r_*}{a} < 0$, соответствующий интеграл следует заменить нулем. Если краевое условие $u|_{y=0} = 0$ заменить на краевое условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad (9.85)$$

то в формуле (9.84) знак минус следует заменить на плюс.

2. Волновое уравнение, трехмерный случай. Решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 \Delta u = \delta(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\,\omega(t), \quad z_0 > 0, \\ &u|_{z=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=0} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.86)$$

дается формулой

$$u = \frac{\omega\left(t - \frac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r} - \frac{\omega\left(t - \frac{r_*}{a}\right)}{4\pi a^2 r_*}, \qquad (9.87)$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$r_* = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2},$$

причем в формуле (9.87) следует считать, что при отрицательных значениях аргумента $\omega(t) = 0$. Если краевое условие $u|_{z=0} = 0$ заменить на

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,$$

то в формуле (9.87) знак минус следует заменить на плюс.

3. Уравнения Максвелла [95]. Пусть вертикальный сосредоточенный диполь помещен в точке (x_0, y_0, z_0), $z_0 > 0$. Его момент пусть равен нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ равен

$$\boldsymbol{P} = f(t)\,\boldsymbol{k}, \tag{9.88}$$

где $\boldsymbol{k}$ — орт оси z. Область $z < 0$ пусть занята идеальным проводником, т. е. $\boldsymbol{E} \equiv 0$, а область $z > 0$ — воздухом ($\sigma = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$). Тогда поле, возбужденное диполем, легко найти по методу отражений. Если взять за поляризационный потенциал

$$\boldsymbol{\Pi} = \left(\frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{f\left(t - \frac{r_*}{c}\right)}{r_*} \right) \boldsymbol{k}, \tag{9.89}$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_* = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2},$$

и вычислить $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ по формулам (9.11), (9.12), то найденное таким образом поле и будет полем, возбужденным вертикальным осциллятором над идеально проводящей плоской землей.

4. Теория упругости, плоская задача Лэмба [69], [80], [95]. Плоская задача Лэмба — это задача о нахождении вектора смещений $\boldsymbol{u}(x, y, t)$, соответствующего вертикальному или горизонтальному сосредоточенному импульсу, действующему на границе полуплоскости $y \geqslant 0$. Задача эта ставится так: нужно найти вектор смещения $\boldsymbol{u}(x, y, t)$, удовлетворяющий при $y > 0$ уравнениям теории упругости

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mu\Delta\boldsymbol{u} = \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{9.90}$$

и краевым и начальным условиям:

$$\boldsymbol{u}\,|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{u}_t\,|_{t=0} = 0,$$

$$\sigma_y\Big|_{y=0} \equiv \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{u} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\delta(x)\,\delta(t),$$

$$\tau_{xy}\Big|_{y=0} \equiv \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} = 0, \qquad \boldsymbol{u} = (u, v)$$

(нормальное воздействие). В случае касательного воздействия импульса граничные условия будут другими, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_y\,|_{y=0} = 0, \\ &\tau_{xy}\,|_{y=0} = -\delta(x)\,\delta(t). \end{aligned}\right\} \tag{9.91}$$

Решение этих задач проще всего записать с помощью потенциалов:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\varphi=-\frac{b}{\mu\pi}\int_0^\infty X(y,t,k)\frac{\cos kx}{k}\,dk, \tag{9.92}$$

$$\psi=\frac{2b}{\mu\pi}\int_0^\infty Y(y,t,k)\frac{\sin kx}{k}\,dk. \tag{9.93}$$

В случае нормального воздействия имеем:

$$X(y,t,k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(2+\zeta^2)\,e^{-yk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}\,e^{ktb\zeta}\,d\zeta}{(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\,\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}, \tag{9.94}$$

$$Y(y,t,k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\,e^{-yk\sqrt{1+\zeta^2}}\,e^{ktb\zeta}\,d\zeta}{(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\,\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}, \tag{9.95}$$

$$\gamma=\frac{a}{b},\quad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\quad \sigma>0.$$

Радикал в правой полуплоскости фиксируется условиями:

$$\arg\sqrt{1+\zeta^2}=\arg\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}=0\quad\text{при } \zeta>0.$$

В случае касательного воздействия формулы (9.92)—(9.95) заменяются на формулы

$$\varphi=-\frac{2b}{\mu\pi}\int_0^\infty X_1(y,t,k)\frac{\sin kx}{k}\,dk, \tag{9.96}$$

$$\psi=\frac{b}{\mu\pi}\int_0^\infty Y_1(y,t,k)\frac{\cos kx}{k}\,dk, \tag{9.97}$$

где

$$X_1(y,t,k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{1+\zeta^2}\,e^{-yk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}\,e^{kbt\zeta}\,d\zeta}{(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\,\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}, \tag{9.98}$$

$$Y_1(y,t,k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(2+\zeta^2)\,e^{-yk\sqrt{1+\zeta^2}}\,e^{kbt\zeta}\,d\zeta}{(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\,\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}. \tag{9.99}$$

5. Трехмерные осесимметричные задачи теории упругости [60], [61], [63], [69], [95]. Задача ставится аналогично задаче (9.90), (9.91), только полуплоскость $y \geqslant 0$ заменяется на полупространство $z \geqslant 0$ и краевые условия на

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \tau_{yz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_z|_{z=0} = -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t). \tag{9.100}$$

Для решения удобно ввести цилиндрическую систему координат $z, \rho\ (= \sqrt{x^2+y^2})$; тогда

$$\boldsymbol{u} = q(\rho, z, t)\,\boldsymbol{\rho} + w(\rho, z, t)\,\boldsymbol{k}, \tag{9.101}$$

$$q = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\psi}{\rho}$$

($\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{k}$ — орты цилиндрической системы координат),

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\mu}\int_0^\infty X(z, t, k)\,J_0(k\rho)\,\frac{dk}{k}, \tag{9.102}$$

$$\psi = \frac{2}{2\pi\mu}\int_0^\infty Y(z, t, k)\,J_1(k\rho)\,\frac{dk}{k}, \tag{9.103}$$

где

$$X = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2+\zeta^2)\,e^{-k\left[z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}-bt\zeta\right]}\,d\zeta}{\zeta\left[(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\right]}, \tag{9.104}$$

$$Y = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\,e^{-k\left[z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}-bt\zeta\right]}\,d\zeta}{\zeta\left[(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\right]}, \tag{9.105}$$

$$\gamma = \frac{a}{b}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \sigma > 0,$$

J_0 и J_1 — функции Бесселя. Радикалы фиксируются так же, как в плоском случае.

§ 6. Дифракция от угла и полуплоскости

А. Стационарные задачи

1. Случай дифракции плоской волны. Предположим, что в цилиндрической системе координат (r, φ, z) падающее возмущение имеет вид плоской монохроматической волны

$\exp\{-i(\omega t+kr\cos(\varphi-\varphi_0))\}$, распространяющейся в направлении $\varphi=\varphi_0+\pi$. Эта волна испытывает отражение и дифракцию от угла $\alpha\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, на границе которого заданы однородные условия Дирихле $u=0$ (идеально проводящий клин в случае электромагнитной дифракции или жестко заделанный клин в акустике). Суммарное волновое поле, удовлетворяющее в области $(r\geqslant 0,\ 0\leqslant\varphi<\alpha)$ уравнению

$$\Delta u+k^2u=0,$$

граничным условиям

$$u|_{\varphi=0}=u|_{\varphi=\alpha}=0$$

и содержащее в себе, помимо падающей и отраженных плоских волн, только уходящее на бесконечность дифракционное возмущение, может быть представлено в виде [62], [68], [95], [96], [104]

$$u=\frac{4\pi}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-i\mu\frac{\pi}{2}}J_\mu(kr)\sin\mu\varphi_0\sin\mu\varphi, \tag{9.106}$$

где $J_\mu(kr)$ — функция Бесселя порядка μ, $\mu=\frac{m\pi}{\alpha}$.

2. Случай плоского точечного источника [62], [68], [95], [96]. Перейдем к рассмотрению дифракции от угла $\alpha\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ цилиндрической волны

$$u_0=H_0^{(1)}\left(k\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\right)$$

в предположении, что суммарное волновое поле u подчиняется в области $(r\geqslant 0,\ 0<\varphi<\alpha)$ условиям излучения, уравнению

$$\Delta u+k^2u=0$$

и удовлетворяет на границе области условиям

$$u|_{\varphi=0}=u|_{\varphi=\alpha}=0.$$

Суммарное волновое поле такой задачи может быть представлено формулой

$$u=\frac{4\pi}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_\mu^{(p)}(r,r_0)\sin\mu\varphi_0\sin\mu\varphi, \tag{9.107}$$

в которой

$$\Phi_\mu^{(p)}(r, r_0) = \begin{cases} J_\mu(kr)\, H_\mu^{(1)}(kr_0) \text{ при } r < r_0 \ (p=1), \\ H_\mu^{(1)}(kr)\, J_\mu(kr_0), \text{ если } r > r_0 \ (p=2), \end{cases} \tag{9.108}$$

и $\mu = \dfrac{m\pi}{\alpha}$.

3. Пространственный случай [62], [68], [131]. Будем считать, что в точке (r_0, φ_0, z_0) вне двугранного угла $(r \geqslant 0, \alpha \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, -\infty < z < \infty)$, на поверхности которого выполняются условия $u = 0$, находится источник, создающий в безграничной среде волновое поле

$$u_0 = \frac{e^{+ikR(\varphi - \varphi_0)}}{R(\varphi - \varphi_0)},$$

где

$$R(\beta) = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\beta + (z - z_0)^2}.$$

Суммарное поле, удовлетворяющее в области $(r \geqslant 0, 0 < \varphi < \alpha, -\infty < z < \infty)$ уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

граничным условиям

$$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\alpha} = 0$$

и условиям излучения, может быть представлено в виде

$$u = e^{-i\omega t} \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\alpha} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sin\mu\varphi_0 \sin\mu\varphi \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_\mu(hr) H_\mu^{(1)}(hr_0)\, e^{-|z-z_0|\sqrt{h^2-k^2}} \dfrac{h\,dh}{\sqrt{h^2-k^2}} \\ (r < r_0), \\ \dfrac{2\pi}{\alpha} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sin\mu\varphi_0 \sin\mu\varphi \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_\mu^{(1)}(hr)\, J_\mu(hr_0)\, e^{-|z-z_0|\sqrt{h^2-k^2}} \dfrac{h\,dh}{\sqrt{h^2-k^2}} \\ (r > r_0), \end{cases}$$

где $\mu = \dfrac{m\pi}{\alpha}$, (9.109)

Случаи задания условий Неймана $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0$ на границе угловой области ($\alpha\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$) отличаются от только что рассмотренных лишь тем, что в окончательных выражениях вместо произведений $\sin\mu\varphi_0\sin\mu\varphi$ будут стоять функции $\varepsilon_m\cos\mu\varphi_0\cos\mu\varphi$, где $\varepsilon_m=1$ при $m\geqslant 1$ и $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$. При этом суммирование в выражениях для результирующих полей будет начинаться с $m=0$.

Наконец, в случае угловой области с поглощающей границей, т. е. при граничных условиях вида

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+ikgu=0, \tag{9.110}$$

известно решение [55] для случая начального возмущения в виде плоских монохроматических волн.

4. Стационарные задачи дифракции в теории упругости [131]. В декартовой системе координат (x, y) задан разрез $y=0$, $x\leqslant 0$, свободный от напряжений, на который падает начальное возмущение (продольное или поперечное) в виде плоской монохроматической волны, изменяющейся во времени по закону $\exp(-i\omega t)$. Если ввести продольный Φ и поперечный Ψ потенциалы, то задача сведется к определению в плоскости (x, y) функций Φ и Ψ из уравнений

$$\Delta\Phi+k_1^2\Phi=0,\quad k_1=\frac{\omega}{a},\quad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},$$

$$\Delta\Psi+k_2^2\Psi=0,\quad k_2=\frac{\omega}{b},\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

граничных условий

$$\left.\begin{aligned}\frac{\tau_{yy}}{2\rho b^2}&\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{k_1^2}{2}\right)\Phi-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}=0 \quad (y=0,\ x\leqslant 0),\\ -\frac{\tau_{xy}}{2\rho b^2}&\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{k_1^2}{2}\right)\Psi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=0 \quad (y=0,\ x\leqslant 0)\end{aligned}\right\} \tag{9.111}$$

и условий излучения, накладываемых на возникающие отраженное и дифракционное возмущения. Решение этой задачи представляется в виде

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\frac{k_1^2}{2}-\lambda^2\right)R_1(\lambda)-\right.\\ &\left.-\operatorname{sgn}(y)\,\lambda\sqrt{k_2^2-\lambda^2}\,R_2(\lambda)\right\}e^{-i\left(\lambda x+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,|y|\right)}\,dx,\\ \Psi &= \Psi_0 + \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\frac{k_1^2}{2}-\lambda^2\right)R_2(\lambda)+\right.\\ &\left.+\operatorname{sgn}(y)\,\lambda\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,R_1(\lambda)\right\}e^{-i\left(\lambda x+\sqrt{k_2^2-\lambda^2}\,|y|\right)}\,dx,\end{aligned}\right\}\qquad(9.112)$$

где Φ_0 и Ψ_0 — потенциалы начального возмущения, а остальные величины определяются из формул:

$$\left.\begin{aligned}&R_1(\lambda)\left\{\left(\frac{k_1^2}{2}-\lambda^2\right)+\lambda^2\sqrt{(k_1^2-\lambda^2)(k_2^2-\lambda^2)}\right\}=\\ &\qquad=+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\lambda-\varkappa}\,\frac{F_{\rm I}(\lambda)}{F_{\rm I}(\varkappa)}\,\frac{\sqrt{k_1-\lambda}}{\sqrt{k_1-\varkappa}},\\ &R_2(\lambda)\left\{\left(\frac{k_1^2}{2}-\lambda^2\right)+\lambda^2\sqrt{(k_1^2-\lambda^2)(k_2^2-\lambda^2)}\right\}=\\ &\qquad=+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\lambda-\varkappa}\,\frac{F_{\rm II}(\lambda)}{F_{\rm II}(\varkappa)}\,\frac{\sqrt{k_2-\lambda}}{\sqrt{k_2-\varkappa}},\\ &F_{\rm I,\,II}(\lambda)=e^{f_{\rm I,\,II}(\lambda)},\\ &f_{\rm I,\,II}(\lambda)=\ln\frac{\lambda_R\pm\lambda}{k_1\pm\lambda}+\\ &\qquad+\frac{1}{\pi}\int_{\mp k_2}^{\pm k_1}\operatorname{arctg}\frac{\left(\frac{k_1^2}{2}-z^2\right)^2}{z^2\sqrt{(z^2-k_2^2)(k_1^2-z^2)}}\,\frac{dz}{z-\lambda},\end{aligned}\right\}\qquad(9.113)$$

в которых

$$\left(\frac{k_1^2}{2}-\lambda_R^2\right)^2+\lambda_R^2\sqrt{(k_1^2-\lambda_R^2)(k_2^2-\lambda_R^2)}=0.$$

Этим же методом можно рассмотреть задачу на дифракцию плоской (продольной или поперечной) монохроматической волны от жестко заделанного упругого полубесконечного выреза.

Б. Нестационарные задачи

5. Случай дифракции плоской волны [68], [79, т. III] [95]. Пусть падающее возмущение имеет вид плоской нестационарной волны

$$u_0 = \varepsilon(at + r\cos(\varphi - \varphi_0)),$$

где

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } s < 0 \end{cases}$$

$\left(c = \dfrac{k}{\omega}\right.$ — обратная величина от скорости распространения$\left.\right)$, распространяющейся в направлении $\varphi = \varphi_0 + \pi$ и испытывающей отражения и дифракцию от угла $\alpha \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, на образующих которого выполняется условие $u = 0$. Суммарное волновое поле, удовлетворяющее в области $(r \geqslant 0,\ 0 < \varphi < \alpha)$ уравнению

$$a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

граничным условиям

$$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\alpha} = 0,$$

и нулевым начальным данным

$$(u - u_0)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(u - u_0)\Big|_{t=0} = 0,$$

представляется при $\tau = \dfrac{t}{cr}$ в виде

$$u = u_{\varphi+\pi-\varphi_0} + u_{\varphi-\pi+\varphi_0} - u_{\varphi+\pi+\varphi_0} - u_{\varphi-\pi-\varphi_0},$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_\beta &= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{P(\tau)\sin\frac{\pi}{\alpha}\beta}{1 - P(\tau)\cos\frac{\pi}{\alpha}\beta}, \\ P(\tau) &= (\tau - \sqrt{\tau^2 - 1})^{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.114)$$

6. Случай плоского точечного источника [68]. Остановимся на случае дифракции от угла волны

$$u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{s} H_0^{(2)}(-icRs)\, e^{st}\, ds,$$

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

созданной действием плоского точечного источника, расположенного в пункте с координатами (r_0, φ_0). Как и прежде, будем считать, что на плоскостях $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ выполняется условие $u = 0$. В этих предположениях в угловой области $(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$ ищется волновое поле, удовлетворяющее уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

и нулевым начальным данным

$$u\,|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$$

Решение задачи на нестационарную дифракцию волны u_0 от угла имеет вид

$$u = u_{\varphi - \varphi_0 + \pi} + u_{\varphi - \varphi_0 - \pi} - u_{\varphi + \varphi_0 + \pi} - \\ - u_{\varphi + \varphi_0 - \pi} + u^c_{\varphi - \varphi_0} - u^c_{\varphi + \varphi_0}, \qquad (9.115)$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_\beta &= \frac{2}{\alpha\pi i} \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_\tau^\infty \frac{q^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\cos\frac{\pi\beta}{\alpha} - q\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1 - 2q^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi\beta}{\alpha} + q^{\frac{2\pi}{\alpha}}} \times \\ &\qquad\qquad \times \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \gamma^3 + 2\gamma\cos\theta - 1}}, \\ u^c_\beta &= \frac{1}{\pi i} \ln\left(1 - 2\gamma^{-\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi\beta}{\alpha} + \gamma^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right), \\ q &= \frac{\gamma \sin^2\theta}{\lambda^2 - \gamma^2 + 2\gamma\cos\theta - 1}, \qquad \tau \doteq \frac{t}{cr}, \\ \gamma &= \begin{cases} \dfrac{r}{r_0} & (r_0 < r), \\ \dfrac{r_0}{r} & (r_0 > r). \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (9.116)$$

В. Случай пространственного сосредоточенного источника [68]

7. Дифракция волны от угла. Рассмотрим дифракцию волны

$$u_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{s(t - cR)}}{R} \frac{ds}{s},$$

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (z - z_0)^2},$$

созданной действием точечного источника с координатами (r_0, φ_0, z_0), от угла $(r \geqslant 0,\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty)$. Решение этой нестационарной задачи при нулевых граничных условиях и нулевых начальных данных имеет вид

$$u = u_{\varphi - \varphi_0 + \pi} - u_{\varphi - \varphi_0 - \pi} + u_{\varphi + \varphi_0 + \pi} - u_{\varphi - \varphi_0 - \pi} + \\ + u^c_{\varphi - \varphi_0} - u^c_{\varphi + \varphi_0}, \tag{9.117}$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_\beta &= \frac{1}{\pi\alpha} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \frac{P^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi}{\alpha}\beta}{1 - 2P^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{\alpha}\beta + P^{\frac{2\pi}{\alpha}}} \frac{c \sin\psi \, d\theta \, d\psi}{t - cR_\theta \cos\psi}, \\ u^c_\beta &= \frac{2}{\alpha} \int\limits_0^\pi \frac{P_1^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\cos \frac{\pi\beta}{\alpha} - P_1^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right)}{1 - 2P_1^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\beta}{\alpha} + P_1^{\frac{2\pi}{\alpha}}} \frac{d\theta}{R_\theta}, \end{aligned} \right\} \tag{9.118}$$

$$P = \frac{c^2 rr_0 \sin^2\theta \sin^2\psi}{(t - cR_\theta \cos\psi)^2}, \qquad P_1 = \frac{rr_0 \sin^2\theta}{R_\theta^2},$$

$$R_\theta = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta + (z - z_0)^2}.$$

8. Дифракция плоской упругой волны от угла [77]. Рассматривается упругая среда, заполняющая плоскость (x, y)

с вырезом ($0<\varphi<\alpha$, $\alpha<\pi$). В момент $t=0$ до острия угла $r=0$ доходит плоская продольная волна

$$\Phi_0=\varepsilon\left(t-\theta_0 x+y\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_0^2}\right),$$

$$\varepsilon(s)=\begin{cases}1, & s\geqslant 0,\\ 0, & s<0,\end{cases}\qquad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

(a — скорость распространения продольной волны, θ_0 — постоянная, определяющая направление падения волны), вызывающая отраженные и дифрагированные волны. Задача решается при условии, что на сторонах угла отсутствуют касательные напряжения и нормальные смещения:

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{r\varphi}=0\\ u_\varphi=0\end{array}\right.\qquad (\text{при } \varphi=0 \text{ и } \varphi=\alpha)$$

(что соответствует прилипанию без трения). При данных граничных условиях в указанной угловой области не возникает поперечных возмущений Ψ и задача сводится к отысканию продольного потенциала Φ из уравнения

$$a^2\,\Delta\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},$$

граничных условий

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\alpha}=0$$

и нулевых начальных данных

$$(\Phi-\Phi_0)\,|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t}(\Phi-\Phi_0)\,|_{t=0}=0.$$

Решение последней задачи имеет вид

$$\Phi=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\ln\frac{(e^{-\gamma_1 i}-z)(e^{-\gamma_2 z}-z)}{(e^{\gamma_1 i}-z)(e^{\gamma_2 i}-z)}+\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\pi},\qquad(9.119)$$

где

$$z=\left(e^{(\theta_0-\alpha)i}P\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}},$$

$$P=(\tau-\sqrt{\tau^2-1}),\qquad \tau=\frac{at}{r},$$

причем

$$\beta \geqslant \alpha, \quad \beta = \arccos\frac{\theta_0}{a}, \quad \gamma_1 = \pi\frac{\beta-\alpha}{2\pi-\alpha},$$

$$\gamma_2 = \pi - \frac{\pi\beta}{2\pi-\alpha}.$$

Из других решенных задач на дифракцию нестационарных волн от угловых областей следует упомянуть дифракцию плоской нестационарной волны (продольной или поперечной) от полубесконечного упругого выреза в случае отсутствия на нем смещений или напряжений [87], [97], [98].

§ 7. Задачи стационарной дифракции в случае цилиндрических и сферических границ раздела

1. Стационарная дифракция в случае волнового уравнения [29], [53], [96], [105], [106], [115]. Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ). Уравнение границы раздела сред: $r=R$; $(r=R_0>R,\ \vartheta=0)$ — координаты источника, временной множитель — $e^{-i\omega t}$.

Скалярное волновое поле $u_\nu(r, \vartheta)$ (не зависит от координаты φ) является решением уравнений

$$\Delta u_\nu + k_\nu^2 u_\nu = \begin{cases} -\dfrac{\delta(r-R_0)\,\delta(\vartheta)}{2\pi r^2 \sin\vartheta}, & \nu=1\ ^*), \\ 0, & \nu=2 \end{cases} \tag{9.120}$$

(для безграничной среды $\nu=1$, для внутренности сферы $\nu=2$), при следующих граничных условиях:

$$\beta_1 u_1 = \beta_2 u_2\,|_{r=R}, \tag{9.121}$$

$$\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial r} = \alpha_2\frac{\partial u_2}{\partial r}\Big|_{r=R}, \tag{9.122}$$

$k_\nu = \dfrac{\omega}{c_\nu}$, где c_ν — скорость распространения волн соответственно во внешней ($\nu=1$) и внутренней ($\nu=2$) средах; α_1, β_1 и α_2, β_2 — параметры, характеризующие среду.

---

*) $\dfrac{\delta(r-R_0)\,\delta(\theta)}{2\pi r^2 \sin\theta}$ совпадает с δ-функцией, сосредоточенной в точке $R=R_0$, $\theta=0$,

Решения уравнений (9.120) при условиях (9.121), (9.122) с учетом принципа излучения для безграничной среды представимы в виде:

а) поле вне сферы ($R_0 > r > R$):

$$\left.\begin{aligned} u_1(r, R_0, \vartheta) &= \frac{i}{4\pi k_1 R_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\zeta_n^{(1)}(k_1 R_0) \times \\ &\times \left[\psi_n(k_1 r) - Q_n \frac{\psi_n(k_1 R)}{\zeta_n^{(1)}(k_1 R)} \zeta_n^{(1)}(k_1 r)\right] P_n(\cos\vartheta), \\ Q_n &= \frac{\ln'\psi_n(k_2 R) - \frac{\alpha_1 k_1 \beta_2}{\alpha_2 k_2 \beta_1}\left[\ln'\psi_n(k_1 R) - \frac{1}{k_1 R}\right] - \frac{1}{k_2 R}}{\ln'\psi_n(k_2 R) - \frac{\alpha_1 k_1 \beta_2}{\alpha_2 k_2 \beta_1}\left[\ln'\zeta^{(1)}(k_1 R) - \frac{1}{k_1 R}\right] - \frac{1}{k_2 R}}; \end{aligned}\right\} \tag{9.123}$$

б) поле внутри сферы ($R_0 > R > r$):

$$u_2(r, R_0, \vartheta) = \frac{i}{4\pi k_1 R_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\zeta_n^{(1)}(k_1 R_0) \frac{\psi_n(k_1 R)}{\psi_n(k_2 R)} \times$$

$$\times \frac{[\ln'\zeta_n^{(1)}(k_1 R) - \ln'\psi_n(k_1 R)]\,\psi_n(k_2 r) P_n(\cos\theta)}{\frac{\beta_2}{\beta_1}\left[\ln'\zeta_n^{(1)}(k_1 R) - \frac{1}{k_1 R}\right] - \frac{\alpha_2 k_2}{\alpha_1 k_1}\left[\ln'\psi_n(k_2 R) - \frac{1}{k_2 R}\right]}, \tag{9.124}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad \zeta_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$\ln' Z(x) = \frac{\frac{d}{dx} Z(x)}{Z(x)}.$$

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) уравнение границы раздела сред: $r = R$; ($r = R_0 > R$, $\varphi = 0$, z) — координаты источника. Решая уравнения

$$\Delta u_\nu + k_\nu^2 u_\nu = \begin{cases} -\dfrac{\delta(r-R_0)\,\delta(\varphi)}{r}, & \nu = 1\ ^{*)}, \\ 0, & \nu = 2, \end{cases} \tag{9.125}$$

---

*) $\dfrac{\delta(r-R_0)\,\delta(\varphi)}{r}$ совпадает с δ-функцией, сосредоточенной в точке $\varphi = 0$, $r = R_0$.

при условиях сопряжения на границе, определенных формулами (9.121), (9.122), получим следующие выражения для скалярных волновых полей:

а) поле вне цилиндра ($R_0 > r > R$) с учетом принципа излучения:

$$\left.\begin{aligned} u_1(r, R_0, \varphi) &= \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} H_n^{(1)}(k_1 R_0) \left[J_n(k_1 r) - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{J_n(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_1 R)} Q_n H_n^{(1)}(k_1 r) \right], \\ Q_n &= \frac{\ln' J_n(k_2 R) - \dfrac{\alpha_1 k_1}{\alpha_2 k_2} \dfrac{\beta_2}{\beta_1} \ln' J_n(k_1 R)}{\ln' J_n(k_2 R) - \dfrac{\alpha_1 k_1}{\alpha_2 k_2} \dfrac{\beta_2}{\beta_1} \ln' H_n^{(1)}(k_1 R)}; \end{aligned}\right\} \tag{9.126}$$

б) поле внутри цилиндра ($R_0 > R > r$):

$$\begin{aligned} u_2(r, R_0, \varphi) &= \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} H_n^{(1)}(k_1 R_0) \frac{J_n(k_1 R)}{J_n(k_2 R)} \times \\ &\times \frac{\ln' H_n^{(1)}(k_1 R) - \ln' J_n(k_1 R)}{\dfrac{\beta_2}{\beta_1} \ln' H_n^{(1)}(k_1 R) - \dfrac{\alpha_2 k_2}{\alpha_1 k_1} \ln' J_n(k_2 R)} J_n(k_2 r). \end{aligned} \tag{9.127}$$

2. Задачи стационарной дифракции электромагнитных волн для сферических и цилиндрических границ раздела.

а) Цилиндрическая граница раздела [29], [121]. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) уравнение границы раздела сред: $r = R$; ($r = R_0 > R$, $\varphi = 0$, z) — координаты источника. Зависимость поля от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$.

Электромагнитное поле будем характеризовать векторами $\boldsymbol{E}^{(\nu)}$ и $\boldsymbol{H}^{(\nu)}$, которые целесообразно представить суммой полей типа *TM* и *TE* по формулам *)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{(\nu)} &= \boldsymbol{E}_{TM}^{(\nu)} + \boldsymbol{E}_{TE}^{(\nu)}, \\ \boldsymbol{H}^{(\nu)} &= \boldsymbol{H}_{TM}^{(\nu)} + \boldsymbol{H}_{TE}^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \tag{9.128}$$

*) Электромагнитное поле можно рассматривать как сумму двух частичных полей; одно из них (поле *TM*), определенное вектором $\Pi_{\rm I}^{(\nu)}$, назовем *полем электрического типа*, другое (поле *TE*) определяется вектором $\Pi_{\rm II}^{(\nu)}$, его будем называть *полем магнитного типа*.

для внешности ($\nu=1$) и внутренности ($\nu=2$) цилиндра, причем проекции векторов $\boldsymbol{H}_{TM}^{(\nu)}$ и $\boldsymbol{E}_{TE}^{(\nu)}$ на ось z тождественно равны нулю.

Введем:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{TM}^{(\nu)} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}^{(\nu)}, \\ \boldsymbol{H}_{TM}^{(\nu)} &= \frac{1}{c}(-i\omega\varepsilon^{\nu}+4\pi\sigma^{\nu})\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}^{(\nu)}, \\ \boldsymbol{E}_{TE}^{(\nu)} &= \frac{1}{c}\,i\omega\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{II}}^{(\nu)}, \\ \boldsymbol{H}_{TE}^{(\nu)} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{II}}^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \tag{9.129}$$

при помощи *векторов Герца*

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}^{(\nu)} &= G_{\mathrm{I}}^{(\nu)}\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{II}}^{(\nu)} &= G_{\mathrm{II}}^{(\nu)}\boldsymbol{e}_z. \end{aligned}\right\} \tag{9.130}$$

Тогда дифракционная задача для поля TM приводится к решению уравнений

$$\left.\begin{aligned} \Delta G_{\mathrm{I}}^{(1)}+k_1^2G_{\mathrm{I}}^{(1)} &= -\frac{\delta(r-R_0)\,\delta(\varphi)}{r}, \\ \Delta G_{\mathrm{I}}^{(2)}+k_2^2G_{\mathrm{I}}^{(2)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.131}$$

при следующих граничных условиях:

$$k_1^2G_{\mathrm{I}}^{(1)} = k_2^2G_{\mathrm{I}}^{(2)}\Big|_{r=R}, \tag{9.132а}$$

$$k_1^2\frac{\partial G_{\mathrm{I}}^{(1)}}{\partial r} = k_2^2\frac{\partial G_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=R}, \tag{9.132б}$$

а для поля TE — к решению уравнений

$$\left.\begin{aligned} \Delta G_{\mathrm{II}}^{(1)}+k_1^2G_{\mathrm{II}}^{(1)} &= -\frac{\delta(r-R_0)\,\delta(\varphi)}{r}, \\ \Delta G_{\mathrm{II}}^{(2)}+k_2^2G_{\mathrm{II}}^{(2)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.133}$$

с граничными условиями *)

$$\frac{\partial G_{\mathrm{II}}^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial G_{\mathrm{II}}^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=R}, \tag{9.134а}$$

$$k_1^2G_{\mathrm{II}}^{(1)} = k_2^2G_{\mathrm{II}}^{(2)}\Big|_{r=R}, \tag{9.134б}$$

---

*) Граничные условия в задачах дифракции электромагнитных волн учитывают факт непрерывности тангенциальных составляющих векторов $\boldsymbol{E}^{(\nu)}$ и $\boldsymbol{H}^{(\nu)}$ при переходе через поверхность $r=R$.

где

$$k_1^2 = \frac{1}{c^2}\,\omega^2\mu\left(\varepsilon_1 + i\,\frac{4\pi\sigma_1}{\omega}\right),$$

$$k_2^2 = \frac{1}{c^2}\,\omega^2\mu\left(\varepsilon_2 + i\,\frac{4\pi\sigma_2}{\omega}\right),$$

$\mu_1 = \mu_2 = \mu$ — магнитная проницаемость, ε_ν — диэлектрическая постоянная, c — скорость света.

Кроме того, решения для поля вне цилиндра должны удовлетворять принципу излучения при $\sigma_1 = 0$ или быть ограниченными при $\sigma_1 > 0$.

Ввиду того, что постановки задачи для полей *TM* и *TE* аналогичны, приводится окончательный вид решений для поля *TM* (электрический диполь).

Поле вне цилиндра ($R_0 > r > R$):

$$\left.\begin{aligned} G_1^{(1)} &= \frac{i}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\varphi)\,H_n^{(1)}(k_1R_0)\times \\ &\quad\times\left[H_n^{(2)}(k_1r) - Q_n\,\frac{H_n^{(2)}(k_1R)}{H_n^{(1)}(k_1R)}\,H_n^{(1)}(k_1r)\right], \\ Q_n &= \frac{\ln' H_n^{(2)}(k_1R) - \frac{k_2}{k_1}\ln' J_n(k_2R)}{\ln' H_n^{(1)}(k_1R) - \frac{k_2}{k_1}\ln' J_n(k_1R)}. \end{aligned}\right\} \quad (9.135)$$

Поле внутри цилиндра ($R_0 > R > r$):

$$\left.\begin{aligned} G_1^{(2)} &= \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\varphi)\,\frac{H_n^{(1)}(k_1R_0)\,J_n(k_2r)}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}\,\frac{J_n(k_1R)}{J_n(k_2R)}\times \\ &\quad\times\frac{J_n(k_1R)}{J_n(k_2R)}\cdot\frac{\ln' H_n^{(1)}(k_1R) - \ln' J_n(k_1R)}{\ln' H_n^{(1)}(k_1R) - \frac{k_2}{k_1}\ln' J_n(k_2k)}, \\ \ln' Z(x) &= \frac{\frac{d}{dx}Z(x)}{Z(x)}. \end{aligned}\right\} \quad (9.136)$$

В задаче дифракции электромагнитных волн от идеально проводящего цилиндра ($\sigma_2 \to \infty$) ищется решение уравнений

(9.131) для полей TM и TE соответственно с однородными граничными условиями *) для (9.132а) и (9.134а).

Условия же (9.132б) и (9.134б), выведенные из требования, что тангенциальная составляющая H_φ магнитного поля непрерывна при проходе через поверхность раздела сред, при бесконечно большой проводимости одной из сред теряют смысл.

Поле TM в области $R_0 > r > R$ в этом случае представимо формулой

$$G_{\mathrm{I}}^{(1)} = \frac{i}{8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\varphi) H_n^{(1)}(k_1 R_0) \left[H_n^{(2)}(k_1 r) - \right.$$
$$\left. - \frac{H_n^{(2)}(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_1 R)} H_n^{(1)}(k_1 r) \right]. \tag{9.137}$$

Это же выражение можно получить непосредственно из (9.135), полагая $|k_2| \to \infty$.

б) Сферическая граница раздела [91], [93], [94], [103], [105], [116]. Если в сферической системе координат (r, φ, ϑ) граница раздела: $r = R$; $(r = R_0 > R, \vartheta = 0)$ — координаты источника, то, представляя снова электромагнитное поле в виде сумм (9.128), где равны нулю радиальные составляющие векторов $\boldsymbol{H}_{TM}^{(\nu)}$, $\boldsymbol{E}_{TE}^{(\nu)}$, и полагая

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{I}}^{(\nu)} &= r G_{\mathrm{I}}^{(\nu)} \boldsymbol{e}_r, \\ \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{II}}^{(\nu)} &= r G_{\mathrm{II}}^{(\nu)} \boldsymbol{e}_r, \end{aligned} \right\} \tag{9.138}$$

при учете формул (9.129) сведем задачу к решению уравнений: для поля TM

$$\Delta G_{\mathrm{I}}^{(1)} + k_1^2 G_{\mathrm{I}}^{(1)} = - \frac{\delta(r - R_0)\,\delta(\vartheta)}{2\pi r^2 \sin\vartheta}, \tag{9.139а}$$

$$\Delta G_{\mathrm{I}}^{(2)} + k_2^2 G_{\mathrm{I}}^{(2)} = 0 \tag{9.139б}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial r}(r G_{\mathrm{I}}^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial r}(r G_{\mathrm{I}}^{(2)}) \,|_{r=R}, \tag{9.140а}$$

$$k_1^2 G_{\mathrm{I}}^{(1)} = k_2^2 G_{\mathrm{I}}^{(2)} \,|_{r=R}; \tag{9.140б}$$

*) Под однородным граничным условием будем понимать условие с правой частью, равной нулю.

для поля TE

$$\Delta G_{\text{II}}^{(1)} + k_1^2 G_{\text{II}}^{(1)} = -\frac{\delta(r - R_0)\,\delta(\vartheta)}{2\pi r^2 \sin\vartheta}, \tag{9.141а}$$

$$\Delta G_{\text{II}}^{(2)} + k_2^2 G_{\text{II}}^{(2)} = 0 \tag{9.141б}$$

при граничных условиях

$$G_{\text{II}}^{(1)} = G_{\text{II}}^{(2)}\big|_{r=R}, \tag{9.142а}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r G_{\text{II}}^{(1)}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r G_{\text{II}}^{(2)}\right)\big|_{r=R}. \tag{9.142б}$$

Как и выше, решения для полей TM и TE вне сферы должны удовлетворять условиям излучения.

Если источник — электрический диполь (поле TM), то, например, для области $(R_0 > r > R)$ из формул (9.139), (9.140) следует:

$$G_{\text{I}}^{(1)} = \frac{i}{4\pi k_1 R_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_1 R_0)\left[\psi_n(k_1 r) - \right.$$
$$\left. - Q_n \frac{\psi_n(k_1 R)}{\zeta_n^{(1)}(k_1 R)}\,\zeta_n^{(1)}(k_1 r)\right] P_n(\cos\vartheta), \tag{9.143}$$

где

$$Q_n = \frac{\ln'\psi_n(k_1 R) - \dfrac{k_1}{k_2}\ln'\psi_n(k_2 R)}{\ln'\zeta_n^{(1)}(k_1 R) - \dfrac{k_1}{k_2}\ln'\psi_n(k_2 R)} \tag{9.144}$$

и

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad \zeta_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x),$$

$$\ln' Z(x) = \frac{\dfrac{d}{dx} Z(x)}{Z(x)}.$$

В случае идеально проводящей среды дифракционная задача для поля TM приводится к решению уравнения (9.139) с однородным граничным условием (9.140а), а для поля TE — к решению уравнения (9.141а) при однородном граничном условии (9.142а).

Для поля TM, например, получим следующее представление:

$$G_1^{(1)} = \frac{i}{4\pi k_1 R_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_1 R_0) \times$$

$$\times \left[\psi_n(k_1 r) - \frac{\psi_n'(k_1 R)}{\zeta_n^{(1)\prime}(k_1 R)} \zeta_n^{(1)}(k,\ r) \right] P_n(\cos\vartheta). \qquad (9.145)$$

§ 8. Задачи нестационарной дифракции в случае цилиндрических и сферических границ раздела

[16], [17], [18], [51], [65], [71], [117]

1. Скалярное волновое поле линейного источника в двух однородных средах, разделенных круговой цилиндрической границей. Пусть в цилиндрической системе координат $(r,\ \theta,\ z)$ $r = R$ — уравнение границы раздела сред, $(R_1,\ 0,\ z)$ — координаты линейного источника, $a(t)$ — интенсивность источника, начинающего действовать в момент времени $t = 0$ ($a(t) = 0$ при $t < 0$) *). Волновое поле $u(r,\ \theta,\ t)$ (не зависящее от координаты z) является решением уравнения

$$u_{tt} - c^2(r)\,\Delta u = a(t)\,\frac{\delta(r - R_1)\,\delta(\theta)}{R_1}\ ^{**}), \qquad (9.146)$$

в котором

$$c(r) = \begin{cases} c_1, & r < R, \\ c_2, & r > R, \end{cases}$$

— кусочно постоянная функция, при следующих условиях сопряжения на границе сред:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R-0} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R+0}, \quad \mu_1 u\,|_{r=R-0} = \mu_2 u\,|_{r=R+0}, \qquad (9.147)$$

и начальных данных

$$u\left.\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (9.148)$$

Постоянные c_1 и c_2 суть скорости распространения волн соответственно во внутренней и внешней средах, μ_1 и μ_2 — плотности этих сред.

---

*) О понятии интенсивности точечного источника см. гл. II.

**) См. сноску *) на стр. 326.

Если ввести обозначения:

$$\rho=\frac{r}{R},\quad \rho_1=\frac{R_1}{R},\quad \tau=\frac{c_2 t}{R},\quad \gamma=\frac{c_2}{c_1},\quad \eta=\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

то решение уравнения (9.146) при условиях (9.147) и (9.148) определяется следующими формулами.

Внешний источник $(R_1>R)$.

а) Поле во внешней среде $(r>R)$:

$$u(r,\ \theta,\ t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n u_n(r,\ t)\cos n\theta+u_0(r,\ \theta,\ t). \qquad (9.149)$$

б) Поле во внутренней среде $(r<R)$:

$$u(r,\ \theta,\ t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n v_n(r,\ t)\cos n\theta. \qquad (9.150)$$

В формулах (9.149) и (9.150)

δ_n — множители Неймана: $\delta_0=1,\ \delta_n=2,\ n\geqslant 1$,

$$u_n=+\frac{1}{c_2 4R}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{J_n(-i\gamma z)J_n'(-iz)-\eta\gamma J_n'(-i\gamma z)J_n(-iz)}{D(z)}\times$$
$$\times H_n^{(2)}(-i\rho z)H_n^{(2)}(-i\rho_1 z)F_a\left(\frac{c_2}{R}z\right)e^{z\tau}\,dz, \qquad (9.151)$$

$$v_n=\frac{-1}{2\pi}\frac{\eta}{c_2 R}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{J_n(-i\rho\gamma z)H_n^{(2)}(-i\rho_1 z)}{D(z)}F\left(\frac{c_2}{R}z\right)e^{z\tau}\frac{dz}{z}, \qquad (9.152)$$

$$D(z)=J_n(-i\gamma z)H_n^{(2)\prime}(-iz)-\eta\gamma J_n'(-i\gamma z)H_n^{(2)}(-iz), \qquad (9.153)$$

$J_n(x)$ — функция Бесселя, $H_n^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода, $F_a(x)$ — преобразование Лапласа от функции $a(t)$:

$$F_a(x)=\int_0^{\infty}a(t)\,e^{-xt}\,dt,$$

$u_0(r, \theta, t)$ — поле источника в безграничном пространстве, занятом средой со скоростью распространения c_2;

$$u_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi c_2} \displaystyle\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} \dfrac{a(\tau)\,d\tau}{\sqrt{c_2^2(t-\tau)^2 - r^2}} & \left(t - \dfrac{r}{c_2} \geqslant 0\right), \\ 0 & \left(t - \dfrac{r}{c_2} < 0\right), \end{cases} \tag{9.154}$$

$$r = \sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho\cos\theta}.$$

Внутренний источник ($R_1 < R$).

а) Поле во внешней среде ($r > R$):

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n u_n(r, t)\cos n\theta. \tag{9.155}$$

б) Поле во внутренней среде ($r < R$):

$$v(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n v_n(r, t)\cos n\theta + v_0(r, \theta, t). \tag{9.156}$$

В формулах (9.155) и (9.156)

$$u_n = \frac{-c_2}{2\pi c_1^2}\,\frac{1}{R}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{H_n^{(2)}(-i\rho z)\,J_n(-i\rho_1\gamma z)}{zD(z)}\,F_a\left(\frac{c_2}{R}z\right)e^{z\tau}\,dz, \tag{9.157}$$

$$v_n = +\frac{c_2}{4c_1^2}\,\frac{1}{R}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{H_n^{(2)\prime}(-i\gamma z)H_n^{(2)}(-iz) - \eta\gamma H_n^{(2)}(-i\gamma z)H_n^{2\prime}(-iz)}{D(z)} \times$$
$$\times J_n(-i\gamma\rho z)\,J_n(-i\gamma\rho_1 z)\,F_a\left(\frac{c_2}{R}z\right)e^{z\tau}\,dz, \tag{9.158}$$

$v_0(r, \theta, t)$ — поле источника в безграничном пространстве, занятом средой со скоростью распространения c_1:

$$v_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi c_1} \displaystyle\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} \dfrac{a(\tau)\,d\tau}{\sqrt{c_1^2(t-\tau)^2 - r^2}} & \left(t - \dfrac{r}{c_1} \geqslant 0\right), \\ 0 & \left(t - \dfrac{r}{c_1} < 0\right), \end{cases} \tag{9.159}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta}.$$

2. Скалярное волновое поле точечного источника в двух средах, разделенных сферической границей. Пусть в сферической системе координат (r, θ, φ) $r = R$ — уравнение границы раздела сред, $(R_1, 0, 0)$ — координаты точечного источника интенсивности $a(t)$ $(a(t) = 0$ при $t < 0)$. Волновое поле $u(r, \theta, t)$ (в силу осевой симметрии задачи u не зависящее от φ) является решением уравнения (9.146), правая часть которого заменена выражением

$$a(t)\frac{\delta(r - R_1)\,\delta(\theta)}{2\pi R_1 \sin\theta}\ ^{*)}$$

при условиях (147), (148).

Волновое поле $u(r, \theta, t)$ в случае сферической границы при различных положениях источника и точки наблюдения выражается рядом

$$u = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,W_n(r, t)\,P_n(\cos\theta). \tag{9.160}$$

Функции $W_n(r, t)$ определяются по формулам (9.151), (9.152), (9.153) и (9.157), (9.158), в которых должны быть произведены следующие изменения. В формулах (9.151) и (9.158) подынтегральная функция умножается на $-i\frac{1}{\pi R}z$, в формулах (9.152) и (9.157) — на $1/(2R)$, кроме того, все функции Бесселя и Ханкеля целого значка и их производные должны быть соответственно заменены функциями

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad \text{и} \quad \zeta_n^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

и их производными.

Поле источника в безграничной среде, входящее в равенства (9.149) и (9.156), определяется теперь соответственно по формулам

$$u_0 = +\frac{1}{4\pi}\,\frac{a\left[\left(\tau - \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 + 2\rho\rho_1\cos\theta}\right)\frac{R}{c_2}\right]}{c_2^2\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 + 2\rho\rho_1\cos\theta}\,R}$$

и

$$v_0 = +\frac{1}{4\pi}\,\frac{a\left[\left(\tau - \gamma\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 + 2\rho_1\rho\cos\theta}\right)\frac{R}{c_2}\right]}{c_1^2\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 + 2\rho\rho_1\cos\theta}\,R}.$$

*) См. сноску *) на стр. 325.

Ряды (9.149), (9.150) и (9.155), (9.156) удовлетворяют уравнению (9.146) и условиям (9.147), (9.148) в обычном смысле при достаточно плавном включении источника. В противном случае формулы (9.149), (9.150) и (9.155), (9.156) дают обобщенное решение задачи (9.146) — (9.148).

§ 9. Приближенные и асимптотические методы в задачах дифракции

1. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов [2], [3], [6], [7], [19], [23], [74], [90], [96], [123] —[127].

а) Волновое уравнение с переменным коэффициентом. Пусть волновой процесс описывается волновым уравнением с переменным коэффициентом

$$\frac{1}{c^2(x, y, z)} u_{tt} - \Delta u = 0. \tag{9.161}$$

Будем считать, что

$$u = u_0(x, y, z) f_0(t-\tau) + u_1(x, y, z) f_1(t-\tau) + O(f_2(t-\tau)), \tag{9.162}$$

где

$$\tau = \tau(x, y, z), \quad f_2' = f_1, \quad f_1' = f_0.$$

Мы будем при этом считать, что функцией f_k можно пренебречь по сравнению с $f_k' = f_{k-1}$.

Так будет, например, если

$$f_k(t) = \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^k} \quad (\omega \text{ велико}), \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9.163}$$

или

$$f_0(t) = t_+^\lambda = \begin{cases} t^\lambda, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f_k(t) = \int_0^t f_{k-1}\, dt \quad (t \text{ мало}). \tag{9.164}$$

В последнем случае каждое дифференцирование увеличивает «силу разрыва» решения при $t = 0$. В отношении функции $O(f_2)$ будем считать, что

$$DO(f_2) \sim f_1, \quad D^2O(f_2) \sim f_0,$$

где через D обозначена производная по любой переменной, знак $\sim$ заменяет слова «имеет тот же порядок, что ...». Если подставить (9.162) в (9.161), то нетрудно получить, что функция $\tau(x, y, z)$ должна удовлетворять *уравнению эйконала*

$$(\operatorname{grad} \tau)^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{9.165}$$

Поверхность $t = \tau$ называется *волновым фронтом*. Зная положение волнового фронта в момент времени $t = 0$, нетрудно построить волновой фронт в произвольный момент времени. Для этого надо из точек M_0 поверхности волнового фронта $\tau = 0$ перпендикулярно к ней провести лучи (т. е. экстремали функционала Ферма $\left(\int \frac{ds}{c}\right)$ и продолжить до точек M таких, что

$$\int_{M_0}^{M} \frac{ds}{c} = t. \tag{9.166}$$

Геометрическое место точек M и даст положение волнового фронта в момент времени t. Характеризуя M_0 двумя параметрами α и β, а точку на луче (т. е. на экстремали) величиной интеграла (9.166), мы придем к системе криволинейных координат α, β, τ.

Пусть $\boldsymbol{X}$ — радиус-вектор точки (x, y, z). Переход от координат α, β, τ к x, y, z можно кратко записать в виде $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\alpha, \beta, \tau)$, тогда

$$u_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}\, \varphi(\alpha, \beta), \quad J = |\boldsymbol{X}_\alpha \times \boldsymbol{X}_\beta|. \tag{9.167}$$

Величина u_0 называется *интенсивностью волнового фронта*, J характеризует расхождение лучей.

Физический смысл формулы (9.167) заключается в том, что в первом приближении энергия распространяется вдоль лучей.

Чтобы найти функции $\varphi(\alpha, \beta)$ и f_0 в случае точечного источника, надо потребовать, чтобы в пределе в малой окрестности источника первый член формулы (9.162) переходил в первый член в соответствующей формуле для волнового уравнения с постоянным коэффициентом. (В этом последнем случае формулы для точечных источников известны; см. § 2).

При отражении и преломлении волн вида (9.162) отраженные и преломленные волны нужно искать тоже в виде (9.162), на преломляющей или отражающей границе следует полагать $\tau_{\text{пад}}=\tau_{\text{прел}}=\tau_{\text{отр}}$ и начальные значения для соответствующих функций находить из краевых условий.

В случае коротковолновой асимптотики для функции Грина (см. § 4), при наличии внешности выпуклой достаточно гладкой области, лучевой метод недавно был строго оправдан [6], [19]. Работа [19] интересна еще тем, что там получена (и строго оправдана) коротковолновая асимптотика в области так называемой полутени.

б) Теория упругости [2], [3], [7], [8], [23], [25], [35], [47], [86]. Если искать решение уравнений динамики упругого тела в виде

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 f_0(t-\tau)+\boldsymbol{u}_1 f_1(t-\tau)+O(f_2), \tag{9.168}$$

считая λ, μ и ρ функциями x, y, z, то аналогично предыдущему мы придем к двум «лучевым решениям»:

продольная волна:

$$(\operatorname{grad}\tau)^2=\frac{1}{a^2},\quad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \tag{9.169}$$

$$|\boldsymbol{u}_0|=\frac{1}{\sqrt{a\rho J}}\varphi(\alpha,\beta),\quad J=|\boldsymbol{X}_\alpha\times\boldsymbol{X}_\beta|,\quad \boldsymbol{u}_0\parallel\operatorname{grad}\tau;$$

поперечная волна:

$$(\operatorname{grad}\tau)^2=\frac{1}{b^2},\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{9.170}$$

$$|\boldsymbol{u}_0|=\frac{1}{\sqrt{b\rho J}}\varphi(\alpha,\beta),\quad J=|\boldsymbol{X}_\alpha\times\boldsymbol{X}_\beta|,\quad \boldsymbol{u}_0\perp\operatorname{grad}\tau.$$

Вектор $\boldsymbol{u}_0$ вращается вдоль касательной к лучу, при этом, если φ — угол между бинормалью к лучу и вектором $\boldsymbol{u}_0$, то

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{T} \tag{9.171}$$

(T — радиус кручения, ds — дифференциал длины дуги).

в) Уравнения Максвелла [126]. Рассмотрим только случай изотропной непоглощающей среды ($\sigma=0$). Ищем $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в виде

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_0 f_0(t-\tau)+\boldsymbol{E}_1 f_1(t-\tau)+O(f_2),\\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{H}_0 f_0(t-\tau)+\boldsymbol{H}_1 f_1(t-\tau)+O(f_2).\end{aligned}\right\} \tag{9.172}$$

Подставляя (9.172) в уравнения Максвелла (§ 1, п. 1), получим:

$$\left.\begin{array}{c}(\operatorname{grad}\tau)^2=\frac{\varepsilon\mu}{c^2},\quad \boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{H}_0,\ \boldsymbol{E}_0\perp\operatorname{grad}\tau,\\ \boldsymbol{H}_0\perp\operatorname{grad}\tau,\\ |\boldsymbol{E}_0|=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu J}}\,\varphi(\alpha,\beta),\quad \mu|\boldsymbol{H}_0|^2=\varepsilon|\boldsymbol{E}_0|^2,\\ J=|\boldsymbol{X}_\alpha\times\boldsymbol{X}_\beta|.\end{array}\right\}\tag{9.173}$$

О нахождении функций f_0, $\varphi(\alpha, \beta)$ как здесь, так и в случае уравнений теории упругости можно повторить все то, что было сказано в случае волнового уравнения.

В случае уравнений Максвелла векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ вращаются вокруг луча, при этом, если φ — угол между бинормалью к лучу и вектором $\boldsymbol{E}_0$, то

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{T}\tag{9.174}$$

(T — радиус кручения, ds — дифференциал дуги луча).

2. Метод Френеля [45], [75], [104], [134]. Метод Френеля изложим для того случая, когда волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta u+k^2u=0,$$

на примере дифракции произвольной волны на непрозрачном экране, имеющем отверстие произвольной формы. Пусть на экран S (рис. 13) слева падает волна и мы хотим найти функцию, характеризующую волновое поле в точке P, находящейся справа от экрана.

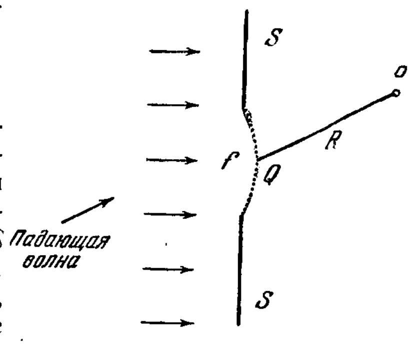

Рис. 13.

Проведем через отверстие в экране произвольную поверхность f. Поле в точке P приближенно найдется как поле точечных источников колебаний, расположенных на поверхности f с плотностью, пропорциональной падающей волне, а именно:

$$u(P)=\int\limits_f \frac{ku(Q)}{2\pi iR}e^{ikR}df_n; \tag{9.175}$$

через df_n обозначена проекция элемента поверхности df на касательную к волновому фронту, через $u(Q)$ обозначена функция, характеризующая падающую волну (точнее, u под знаком интеграла (9.175) равна той величине, которую имела бы функция, характеризующая падающее волновое поле, если бы экрана не было).

Формула (9.175) дает хорошее приближение, когда как размеры отверстия, так и расстояние точки P от его краев велики по сравнению с длиной волны.

3. Метод Кирхгофа [75], [104], [134]. Метод Кирхгофа изложим на примере той же задачи, какая рассматривается в § 2.

Для решения уравнения Гельмгольца имеет место формула Грина

$$u(P)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left(u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikR}}{R}-\frac{\partial u}{\partial n}\frac{e^{ikR}}{R}\right)dS. \tag{9.176}$$

Применим эту формулу к области, лежащей правее экрана и поверхности f. На поверхности экрана полагаем $u=\frac{\partial u}{\partial n}=0$, на поверхности f полагаем

$$u=u_{\text{пад}},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u_{\text{пад}}}{\partial n}, \tag{9.177}$$

где $u_{\text{пад}}$ — падающая волна. То есть на поверхности f волновое поле полагают равным падающему полю при отсутствии экрана. Итак, для u получаем формулу

$$u=\frac{1}{4\pi}\int\limits_f\left(\frac{\partial u_{\text{пад}}}{\partial u}\frac{e^{ikR}}{R}-u_{\text{пад}}\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikR}}{R}\right)dS. \tag{9.178}$$

4. О других асимптотических методах в теории дифракции. В теории дифракции большое значение имеют асимптотические формулы для решения уравнения Гельмгольца $(\Delta+k^2)u=0$ при больших значениях k.

Асимптотика решения задачи Неймана

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)u=(\Delta+k^2)u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\varphi(x, y),\\ &\sqrt{r}\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)\right|_{r\to+\infty}\to 0,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}\qquad(9.179)$$

(здесь S — граница выпуклой ограниченной области) исследована в работе [142]. Особую трудность в задачах дифракции вызывает нахождение асимптотики решений задачи в тех зонах, где поле лучей, построенных по законам геометрической оптики, теряет регулярность. Задачи на нахождение асимптотики в таких областях изучаются в работах [8], [19], [88].

Весьма большое значение для нахождения асимптотики широкого круга дифракционных задач имеет метод параболического уравнения. Задачу о распространении волн в двуслойной среде тогда можно с большой степенью точности заменить задачей, где имеется лишь одна среда, а на границе раздела двух сред выполняются граничные условия Леонтовича. Рамки справочника не позволяют рассказать об этих методах подробно. Укажем литературу, где можно найти и изложение этих методов, и примеры их использования: [9], [19], [32], [41], [48], [49], [52], [64], [72], [76], [84], [88], [91], [137].

§ 10. Литературные указания по другим задачам дифракции

Точное решение в виде интегралов и рядов от специальных функций удается построить лишь в весьма ограниченном классе задач. Общий случай построения решения задачи дифракции на идеально отражающем препятствии, поверхность которого совпадает с координатной поверхностью в системе координат, допускающей разделение переменных в волновом уравнении, рассмотрен в [122].

Подверглись подробному изучению задачи о распространении волн в слоистых средах. Большая часть работ посвящена тому случаю, когда область, в которой распространяются волны, состоит из однородных слоев с плоскими границами раздела; см. работы [3], [15], [28], [42], [59], [66], [67], [70], [100], [130].

Изучался также случай неоднородности, непрерывно меняющейся с изменением одной координаты [1], [15], [58], [96]. Дифракция на эллиптическом цилиндре изучена в работе [20]. Точное решение для ряда задач дифракции на эллиптическом цилиндре и полосе имеется в монографии [52] и работе [139]. Исследованию решения задачи дифракции на полосе посвящены работы [30], [83].

Точно решена задача дифракции электромагнитных и акустических волн на бесконечном эллиптическом конусе [103], [110]—[114], [128], [141].

С помощью метода разделения переменных в координатах сплюснутого эллипсоида вращения удается решить важные задачи дифракции для экрана с круговым отверстием и для кругового диска [10], [102], [132].

Задачи дифракции акустической и электромагнитной волн на вытянутом эллипсоиде вращения рассматриваются в работах [11], [120], [122], [133], [138].

Строгие решения ряда задач дифракции на параболоиде вращения и параболическом цилиндре построены в монографии [109]. Дифракция акустических и электромагнитных волн в случае параболоида вращения изучается в работах [12], [25], [34], [39], [92], [118], [119], [136], а в случае параболического цилиндра — в работах [31], [33], [38], [40], [135].

Дифракция на торе рассмотрена в работе [99], на гиперболоиде вращения — в [24].

Дифракция на произвольном (не эллиптическом) конусе изучалась в работе [13]. В работе [14] изучалась дифракция на цилиндре, имеющем в сечении произвольный выпуклый многоугольник.

В заключение заметим, что обширная библиография по самым разнообразным задачам дифракции имеется в работе [107] и монографии [57].

БИБЛИОГРАФИЯ

К главе I

1. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 2-е, Гостехиздат, 1953.
2. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, изд. 3-е, Гостехиздат, 1957.
3. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 3-е, 1954.
4. Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 2-е, Гостехиздат, 1953.
5. Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
6. Bateman H., Partial differential equations of mathematical physics, Cambridge, New York, 1932.
7. Joos G., Lehrbuch der theoretischen Physik, Leipzig, 1956.

К главе II

1. Бабенко К. И., Гельфанд И. М., Некоторые замечания о гиперболических системах, НДВШ, № 1, 1958.
2. Бабич В. М., Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, Матем. сб. **52** (94), № 2, 1960.
3. Боровиков В. А., Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Труды Московского матем. общества, вып. 8, 1959, 199—257.
4. Боровиков В. А., Некоторые достаточные условия отсутствия лакун, Матем. сб. **55**, № 3, 1961.
5. Вишик М. И., Ладыженская О. А., Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН **11**, 6, 1956.
6. Гелиг А. Х., Устойчивость решений смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка, Изв. вузов, «Математика», № 3, 1960.
7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1958.

9. Гординг Л., Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений, Сборник переводов «Математика», № 2, 1, 1958.
10. Гординг Л., Задачи Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961.
11. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, ч. III, Гостехиздат, 1953.
12. Ильин В. А., О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа, УМН **13**, вып. 1 (79), 1958.
13. Ильин В. А., О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений, УМН **15**, вып. 2 (92), 1960.
14. Йон Ф., Плоские волны и сферические средние, ИЛ, 1958.
15. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, гл. VI, М. — Л., 1951.
16. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.
17. Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, 1950.
18. Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, Матем. сб. **35** (77), 1954, 176—316.
19. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
20. Петровский И. Г., О диффузии волн и лакунах для гиперболических уравнений, Матем. сб. **17**, № 3, 1945.
21. Петровский И. Г., О задаче Коши для системы дифференциальных уравнений с частными производными, Матем. сб. **2** (44), 1937.
22. Повзнер А. Я., Сухаревский И. В., О разрывах функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения, Матем. сб. **51** (93), 1960, 1.
23. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, т. IV, Гостехиздат, 1956.
24. Смирнов В. И., О сингулярных решениях волнового уравнения и уравнений упругости, Труды Сейсмолог. ин-та, № 4, 1934.
25. Соболев С. Л., О почти периодичности решений волнового уравнения, I, ДАН **48**, № 8, 1945; II, ДАН **48**, № 9, 1945; III, ДАН **49**, № 1, 1945.
26. Соболев С. Л., Некоторые новые задачи теории уравнений в частных производных гиперболического типа, Матем. сб. **2** (53), № 3, 1942.
27. Соболев С. Л., Некоторые приложения функционального анализа к математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
28. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Физматгиз, 1953.
29. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
30. Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ИЛ, т. I, 1960, т. II, 1961.

31. Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
32. Courant R., Lax P., The propagation of discontinuities in wave motion, Proc. Nat. Acad. Sci USA **42**, 1956, 872—876.
33. Courant R., Hilbert D., Methods of mathematical physics, т. II, N. Y. — London, 1961.
34. Friedrichs K. O., Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables, Amer. Journ. Math. **70**, № 3, 1948, 555—589.
35. Friedrichs K. O., Symmetric hyperbolic linear equations, Comm. Pure and Appl. Math., 1954, 7.
36. Hadamard J., Le probleme de Cauchy, Paris, 1932.
37. Mathisson M., Le problème de M. Hadamard relatif á la diffusion des ondes, Acta Math. **71**, 1939, 249—282.
38. Rellich F., Riemannsche Integrationmethode bei Differentialgleichungen n-ter Ordnung, Math. Annalen **103**, Heft 2, Berlin, 1930.
39. Riesz M., L'integrale de Riemann-Liouville et le probléme de Cauchy, Acta Math. **81**, 1949, 1—223.
40. Stellmacher K., Eine klasse huyghenscher Differentialgleichungen und ihre Integration, Math. Ann. **130**, № 3, 1955, 219—233.
41. Thomée V., Difference methods for two-dimensional mixed problems for hyperbolic first order systems, Archive for Rat. Mech. and Anal. **8**, № 1, 1961, 68—88.

К главам III и IV

1. Вебстер А. Г. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения математической физики, тт. I и II, ГТТИ, 1934.
2. Гюнтер Н. И., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Гостехиздат, 1953.
3. Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950.
4. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, тт. I и II, Гостехиздат, 1951.
5. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е, Физматгиз, 1958.
6. Ландау Л. и Лифшиц Е., Теория поля, Гостехиздат, 1948.
7. Маделунг Э., Математический аппарат физики, Физматгиз, 1961.
8. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, тт. I и II, ИЛ, 1958.
9. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, изд. 14-е, Гостехиздат, 1956.
10. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, чч. I и II, Физматгиз, 1963.
11. Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.
12. Churchill R. V., Fourier series and boundary value problems, New York, 1941.

13. Jeffreys H. K., Jeffreys B. S., Methods of mathematical physics, Cambridge, New York, 1946.
См. также [1], [4], [6], [7] гл. I.

К главе V

1. Бернштейн С. Н., О некоторых априорных оценках в обобщенной задаче Дирихле, ДАН **124**, № 4, 1959, 735—738.
2. Бирман М. Ш., Метод квадратичных форм в задачах о малом параметре при старших производных, Вестн. ЛГУ, № 13, 1957, 9—12.
3. Бирман М. Ш., О многомерных краевых задачах с малым параметром при старших производных, УМН **12**, вып. 6 (78), 1957, 212—213.
4. Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
5. Вишик М. И., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб. **29** (71), 3, 1951, 615—676.
6. Вишик М. И. и Люстерник Л. А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН **12**, вып. 5 (77), 1957, 3—122.
7. Вишик М. И. и Люстерник Л. А., Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН **15**, вып. 3 (93), 1960, 3—80.
8. Вишик М. И. и Люстерник Л. А., Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями, УМН **15**, вып. 4 (94), 1960, 27—95.
9. Гольденвейзер А. Л., Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, 1953.
10. Кошелев А. И., Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем, УМН **13**, вып. 4 (82), 1958, 29—88.
11. Купрадзе В. Д., Граничные задачи установившихся упругих колебаний, УМН **8**, вып. 3 (55), 1953, 21—74.
12. Ладыженская О. А., О замыкании эллиптического оператора, ДАН **79**, № 5, 1951, 723—725.
13. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.
14. Ладыженская О. А., Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными, Вестн. ЛГУ, № 7, вып. 2, 1957, 104—120.
15. Лопатинский Я. Б., Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. журн., № 2, 1953, 123—151.
16. Мейман Н. Н., Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений, ДАН **33**, № 4, 1941, 275—278.

17. Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.
18. Михлин С. Г., О некоторых оценках, связанных с функцией Грина, ДАН 78, № 3, 1951, 443—446.
19. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
20. Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
21. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, изд. 2-е, Физматгиз, 1962.
22. Олейник О. А., Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений, УМН 12, вып. 3 (75), 1957, 3—73.
23. Олейник О. А., О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения «исчезающей вязкости», УМН 14, вып. 2 (86), 1959, 159—164.
24. Петровский И. Г., О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, УМН 1, вып. 3—4, 1946, 44—70.
25. Friedrichs K. O., Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann. 109, H. 4—5, 1934.
26. Friedrichs K. O., On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, Comm. on Pure and Applied Mathematics, VI, 1953, 299—326.
27. Levinson N., The first boundary problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε, Ann. of Math. 51, № 2, 1950, 428—445.

К главе VI

1. Загорский Т. Я., Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, Изд-во Львовск. ун-та, 1961.
2. Карслоу Х. С., Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.
3. Петровский И. Г., О проблеме Cauchy для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ, сер. А, 1, 1938, 7.
4. Слободецкий Л. Н., О фундаментальном решении и задаче Коши для параболических систем, Матем. сб. 46, (88), 1958, 229—258.
5. Слободецкий Л. Н., Обобщенные решения параболических и эллиптических систем, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 1958, 809—834.
6. Слободецкий Л. Н., Теория потенциала для параболических уравнений, ДАН 103, № 1, 1955, 19—22.
7. Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
8. Эйдельман С. Д., О фундаментальных решениях параболических систем, Матем. сб. 38 (80), 1956, 51—92.

9. Эйдельман С. Д., Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем, Матем, сб. **44** (86), 1958, 481—508.
10. Эйдельман С. Д., О фундаментальных решениях параболических систем, Матем. сб. **53** (95), 1961, 73—136.
11. Carslaw H. S., Jaeger J. C., Conduction of heat in solids, Oxford, New York, 1947.

См. также [3], [4] гл. I и [1], [3], [11] гл. III—IV.

К главе VII

1. Бабенко К. И., К теории уравнений смешанного типа, Докт. дисс. (библиотека Матем. ин-та АН СССР), 1952.
2. Барановский Ф. Т., Задача Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости, Уч. зап. Ленинградского пед. ин-та **166**, 1958.
3. Барановский Ф. Т., Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости, Уч. зап. Ленинградского пед. ин-та **183**, 1958.
4. Березин И. С., О задаче Коши для линейных уравнений второго порядка с начальными данными на линии параболичности, Матем. сб. **24** (66): 2, 1949.
5. Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, Изд-во АН, 1959.
6. Введенская Н. Д., Об одной краевой задаче для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН **91**, № 4, 1953.
7. Векуа И. Н., Новые методы решений эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
8. Вишик М. И., Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Матем. сб. **35** (77), 3, 1954.
9. Вишик М. И., Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. сб. **25** (67), 2, 1949.
10. Ильин А. М., Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения, Матем. сб. **50** (92), 4, 1960.
11. Капилевич М. Б., Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа, Матем. сб. **30** (72), 1, 1952.
12. Карапетян К. И., О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости, ДАН **106**, № 6, 1959.
13. Келдыш М. В., О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН **77**, № 2, 1951.
14. Краснов М. Л., Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка, Матем. сб. **49**, 1, 1959.
15. Михлин С. Г., О применимости вариационного метода к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям, ДАН **91**, № 4, 1953.

16. Михлин С. Г., Вырождающиеся эллиптические уравнения, Вестник ЛГУ, № 8, 1954.
17. Олейник О. А., Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН **87**, № 6, 1952.
18. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
19. Франкль Ф. И., О задаче Коши для уравнений смешанного типа с начальными данными на переходной линии, Изв. АН СССР, сер. матем., **8**, № 5, 1944.
20. Франкль Ф. И., К теории уравнения $yz_{xx}+z_{yy}=0$, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, № 2, 1946.
21. Gellerstedt S., Sur un problème aux limites pour une équation lineaire aux dérivees partielles du second ordre de type mixte, Thésis, Uppsala, 1935.
22. Gellerstedt S., Sur un problème aus limites pour l'equation $y^{2s}z_{xx}+z_{yy}=0$, Arkiv. Mat., Ast. och Fysik. **25A**, № 10, 1935.
23. Germain P., Bader R., Sur quelques problèmes relatifs a l'équation du type mixte de Tricomi, Publ. ONERA, № 54, 1952.
24. Germain P., Bader R., Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une equation du type mixte, Pubi. ONERA, № 60, 1953.
25. Hellwig G., Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten, J. Rat., Mech., Anal. **5**, № 2, 1956.
26. Protter M. H., The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line, Canad. J. Math. **6**, № 4, 1954.

К главе VIII

1. Абуталиев Ф. Б., К численному решению уравнений смешанного типа, Доклады АН УзССР, № 1, 1961, 3—5.
2. Абуталиев Ф. Б., Теорема единственности для некоторых газодинамических проблем, Изв. АН УзССР, серия физ.-матем. наук, № 1, 1961, 12—21.
3. Агишев Р. Я., К проблеме уравнений смешанного типа, Труды Казанского авиационного ин-та, вып. 35, 1957, 3—20.
4. Бабенко К. И., К теории уравнений смешанного типа, диссертация, МГУ, 1951.
5. Бакиевич Н. И., Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа, возникающие при изучении бесконечно малых изгибаний поверхности вращения, УМН **15**, вып. 1/91, 1960, 171—176.
6. Барабанцев Р. Г., Исследование решений краевых задач для уравнения $u_{xx}-K(x)u_{tt}=0$ в полосе с вырождением или сингулярностью на границе, Научные доклады высшей школы, Физ.-матем. науки, № 5, 1958, 6—9, 10—18.
7. Березанский Ю. М., Энергетические неравенства для некоторых классов уравнений смешанного типа, ДАН **131**, № 3, 1960, 478—481; **132**, № 1, 1960, 9—12.

8. Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, 1961.
9. Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова, т. 41, М., 1953.
10. Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях, ДАН **110**, № 6, 1956, 901—902.
11. Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, серия «Итоги науки», вып. 2, М.— Л., 1959.
12. Бицадзе А. В. и Салахитдинов М. С., К теории уравнений смешанно-составного типа, Сибирский матем. журн. **2**, № 1, 1961, 7—19.
13. Бицадзе А. В., Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях, ДАН **143**, № 5, 1962, 1017—1019.
14. Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
15. Волков Е. А., К численному решению задач Лаврентьева — Бицадзе, ДАН **103**, № 5, 1955, 755—759.
16. Вольферсдорф Л., О сингулярной эллиптической задаче Неймана для уравнения Трикоми, Изв. вузов, Математика, № 1/26, 1962.
17. Вострова Л. Е., Смешанная краевая задача для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} - u = 0$, Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та, вып. 21, 1958, 219—267.
18. Вострова Л. Е., Смешанная краевая задача для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе, там же, вып. 29, 1959, 45—66.
19. Гудерлей Г., Теория околозвуковых течений, М., 1960.
20. Девингталь Ю. В., О существовании решения одной задачи Ф. И. Франкля, ДАН **119**, № 1, 1958, 15—18.
21. Девингталь Ю. В., О существовании и единственности решения одной задачи Ф. И. Франкля, Изв. вузов, Математика, № 2—3, 1958, 39—51.
22. Девингталь Ю. В., К вопросу о существовании и единственности решения задачи Франкля, УМН **14**, вып. 1 (85), 1959, 177—182.
23. Дейч М. Е., Техническая газодинамика (Основы газодинамики турбин), Госэнергоиздат, 1953.
24. Джураев Т. Д., Об уравнениях смешанно-составного типа, Изв. АН УзССР, серия физ-матем. наук, № 6, 1961, 3—14.
25. Ефимов Н. В., Качественные вопросы теории деформаций поверхностей, УМН **3**, вып. 2 (24), 1948, 101—139.
26. Жегалов В. И., Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка, ДАН **136**, № 2, 1961, 274—276.
27. Капилевич М. Б., Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа, Матем. сб. **30** (72), № 1, 1952, 11—38.
28. Капилевич М. Б., О главных решениях уравнения гиперболического типа, ДАН **91**, № 4, 1953, 719—722.
29. Капилевич М. Б., К теории линейных дифференциальных уравнений с двумя перпендикулярными линиями параболичности, ДАН **125**, № 2, 1959, 251—254.

30. Карманов В. Г., О существовании решений некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа, Изв. АН СССР, сер. матем., **22**, № 1, 1958, 117—134; ДАН **95**, № 3, 1954, 439—442.
31. Кароль И. Л., Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, ДАН **88**, № 2, 1953, 197—200.
32. Кароль И. Л., К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, Матем. сб. **38** (80), вып. 3, 1956, 262—282.
33. Кароль И. Л., О краевых задачах для уравнения смешанного типа, Вестник ЛГУ, № 1, 1956, 177—181.
34. Келдыш М. В., О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН **77**, № 2, 1951, 181—183.
35. Керимгазиев Э., Решение задачи обтекания профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся скачком уплотнения, методом прямых, Инженерный журн. **1**, вып. 3, 1961, 75—85.
36. Киквидзе З. А., Об одной системе уравнений в частных производных смешанного типа, Сообщения АН Груз. ССР **15**, № 6, 1954, 321—326.
37. Коган М. Н., О магнитогидродинамических течениях смешанного типа, ПММ 25, вып. 1, 1961, 132—137.
38. Лаврентьев М. А. и Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, ДАН **70**, № 3—4, 1950, 373—376, 561—564.
39. Ладыженская О. А., Об одном способе приближенного решения задачи Лаврентьева—Бицадзе, УМН **9**, вып. 4 (62), 1954, 187—189.
40. Линь Цзянь-бин, О некоторых задачах Франкля, Вестник МГУ, сер. матем., астрон., № 13, вып. 3, 1961, 28—39.
41. Михлин С. Г., Об интегральном уравнении Трикоми, ДАН **59**, № 6, 1948, 1053—1056.
42. Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, УМН **3**, вып. 3 (25), 1948, 29—119.
43. Пулькин С. П., Сингулярная задача Трикоми, Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 1, 1956, 65—69.
44. Пулькин С. П., К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве, Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та, вып. 14, 1956, 63—77, 79—97.
45. Пулькин С. П., Задачи Трикоми для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе, ДАН **118**, № 1, 1958, 38—41.
46. Смирнов М. М., Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа, ДАН **104**, № 5, 1955, 699—701.
47. Смирнов М. М., Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа, Вестник МГУ, № 1, 1957, 80—96.
48. Смирнов М. М., О единственности решения краевой задачи для уравнения смешанного типа, Доклады АН БССР **4**, № 1, 1960.

49. Соколовский В. В., Уравнения пластического равновесия при плоском напряженном состоянии, ПММ **13**, вып. 2, 1949, 219—221.
50. Трикоми Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, Гостехиздат, 1947.
51. У Цзи-цянь, Дифференциальные уравнения смешанного типа, Вестник университета им. Сунь Ят-сена, сер. естеств. наук, № 4, 1959, 11—32.
52. Фалькович С. В., Об одном семействе сопел Лаваля, ПММ **11**, № 2, 1947, 223—230.
53. Фалькович С. В., Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях, ПММ **11**, вып. 4, 1947, 459—464.
54. Филиппов А. Ф., О разностном методе решения задачи Трикоми, Изв. АН СССР, сер. матем., **21**, № 1, 1957, 73—88.
55. Франкль Ф. И., О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений, Изв. АН СССР, сер. матем., **9**, 1945, 121—143.
56. Франкль Ф. И., К теории сопел Лаваля, Изв. АН СССР, сер. матем., **9**, 1945, 387—422.
57. Франкль Ф. И., К вопросу о единственности решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком, ПММ **10**, вып. 3, 1946, 421—424.
58. Франкль Ф. И., К теории уравнения $yz_{xx}+z_{yy}=0$, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, № 2, 1946, 135—166.
59. Франкль Ф. И., Об одном семействе частных решений уравнения Дарбу—Трикоми и его применении к приближенному нахождению критического течения в заданном сопле Лаваля, ДАН **56**, 1947, 683—686.
60. Франкль Ф. И., Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками, ДАН **58**, вып. 3, 1947, 381—384.
61. Франкль Ф. И., Исследование по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука, ДАН **57**, № 7, 1947, 661—664.
62. Франкль Ф. И., Об одном классе решений газодинамических уравнений С. А. Чаплыгина, Уч. зап. МГУ, Механика, вып. 154, т. 4, 1951, 287—310.
63. Франкль Ф. И., Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева—Бицадзе, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., **6**, вып. 11, 1951, 3—7.
64. Франкль Ф. И., Об одной краевой задаче для уравнения $yz_{xx}+z_{yy}=0$, Уч. зап. МГУ **3**, вып. 152, Механика, 1951, 99—116.
65. Франкль Ф. И., О боковом водозаборе из быстрых мелких рек, Труды Киргизского государственного ун-та, вып. 2, 1953, 33—45.
66. Франкль Ф. И., Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, ПММ **20**, вып. 2, 1956, 196—202.
67. Франкль Ф. И., Обтекание профилей с зоной местных сверхзвуковых скоростей, оканчивающейся искривленным скачком уплотнения, ПММ **21**, вып. 1, 1957, 141—142.

68. Франкль Ф. И., О задаче симметричного обтекания заданного симметричного профиля при дозвуковой скорости на бесконечности и местных сверхзвуковых скоростях, ПММ **23**, вып. 4, 1959, 776—780.
69. Франкль Ф. И., Теорема существования слабого решения прямой задачи теории плоскопараллельного сопла Лаваля в первом приближении, Изв. вузов, Математика, вып. 6, 1959, 192—201.
70. Франкль Ф. И., Теорема единственности решения одной краевой задачи для уравнения $u_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}u_y\right)=0$, Изв. вузов, Математика, № 1 (8), 1959, 212—217.
71. Франкль Ф. И., О существовании слабого решения прямой задачи теории обтекания профиля звуковым потоком в первом приближении, ДАН **132**, № 4, 1960, 789—792.
72. Франкль Ф. И., Обобщение задачи Трикоми и его применение к решению прямой задачи сопла Лаваля, Матем. сб. **54** (95), вып. 2, 1961, 225—235.
73. Франкль Ф. И., Исследования в области околозвуковых течений, Инженерный журн. **1**, № 1, 1961, 29—34.
74. Халилов З. И., Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток, Доклады АН Азерб. ССР **9**, № 4, 1953, 189—194.
75. Чаплыгин С. А., О газовых струях, Собр. соч., т. 2, 1933, 3—90.
76. Шабат Б. В., Примеры решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа, ДАН **112**, № 3, 1957, 386—389.
77. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. H., A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type, Communications on Pure and Applied Mathematics **6**, № 4, 1953, 455—470.
78. Agmon S., Boundary value problems for equations of mixed type, Atti del Convegno Iternazionale sulle Equazioni alle derivate parziali, Trieste, 1954, Roma, 1955, 54—68.
79. Cinquini-Cibrario M., Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto, Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti, Ser. II, **65**, fasc. 11—15, 1932, 889—906.
80. Cibrario M., Alcuni teoremi di esistenza e di unicita per l'equazione $xz_{xx}+z_{yy}=0$, Atti delle Reale Accademia delle science di Torino **68**, 1932—1933, 35—44.
81. Conti R., Sul problema di Cauchy per le equazioni di tipo misto $y^k z_{xx}-x^k z_{yy}=0$, I, II, Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e Matematiche, Ser. 3, **2**, 1948, 105—130; **4**, 1950, 1—25.
82. Friedrichs K. O., Symmetric positive linear differential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics **11**, № 3, 1958, 333—418.
83. Gellerstedt S., Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte, Thèse, Uppsala, 1935.

84. Gellerstedt S., Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **26A**, № 3, 1937.
85. Germain P. et Bader R., Sur le problème de Tricomi, Comptes rendus **232**, № 6, 1951, 463—465.
86. Germain P. et Bader R., Sur le problème de Tricomi, Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, Ser. 2, **2**, 1953, 53—69.
87. Holmgren E., Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **19B**, № 14, 1926.
88. Lax P. D., Phillips R. S., Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Communications on Pure and Applied Mathematics **13**, № 3, 1960, 427—455.
89. Morawetz C. S., A uniqueness theorem for Frankl's problem, Communications on Pure and Applied Mathematics **7**, № 4, 1954, 697—703.
90. Morawetz C. S., Note on a maximum principle and a unique ness theorem for an elliptic-hyperbolic equation, Proceedings of the Royal Society, London, Ser. A., **236**, № 1204, 1956, 141—144.
91. Morawetz C. S., The non-existence of continuous transsonic flows past profiles, I, II, III, Communications on Pure and Applied Mathematics **9**, 1956, 45—68; **10**, 1957, 107—131; **11**, 1958, 129—144.
92. Morawetz C. S., Uniqueness for the analogue of the Neuman problem for mixed equations, The Michigan Mathem. J. **4**, № 1, 1957, 5—14.
93. Morawetz C. S., A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type, Communications on Pure and Applied Mathematics **11**, № 3, 1958, 315—331.
94. Ou Sing-mo, Ding Shia-shi, Sur l'unicite du probléme de Tricomi de l'équation de Chaplygin, Acta Mathematica Sinica **5**, 1955, № 3, 393—399.
95. Protter M. H., An existence theorem for the generalized Tricomi problem, Duke Mathem. J. **21**, № 1, 1954, 1—7.
96. Protter M. H., Uniqueness theorems for the Tricomi problem, J. Rat., Mech., Anal. **2**, № 1, 1953, 107—114; **4**, № 5, 1955, 721—732.
97. Protter M. H., New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type, J. Rat., Mech., Anal. **3**, № 4, 1954, 435—446.
98. Tricomi F., Ulteriori richerche sull'equazione $yz_{xx} + z_{yy} = 0$, Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo **52**, 1928, 63—90.
99. Tricomi F., Sull'equazione $yz_{xx} + z_{yy} = 0$, Atti del congresso internazionale matem. di Bologna del 1928, т. 3, 1930, 27—29.
100. Vincenti W. G., Wagoner C. B., Transsonic flow past a wedge profile with detached bow wave, NACA Technical Note № 2588 (1951), № 2832 (1952).

К главе IX

1. Алексеев А. С., Задачи типа Лэмба для волнового уравнения в линейно-неоднородном полупространстве, Уч. зап. ЛГУ, № 246, 1958, 167—227.
2. Алексеев А. С., Гельчинский Б. Я., Об определении интенсивности головных волн в теории упругости лучевым методом, Сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн», V, Изд-во ЛГУ, 1961.
3. Алексеев А. С., Цепелев Н. В., Интенсивность отраженных волн в слоисто-неоднородной упругой среде, Изв. АН, сер. геофиз., № 9, 1956, 1021—1035.
4. Бабич В. М., Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, Матем. сб. **52** (94): 2, 1960, 709—738.
5. Бабич В. М., Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды, ПММ **25**, № 1, 1961, 38—45.
6. Бабич В. М., О коротковолновой асимптотике функции Грина для внешности ограниченной выпуклой области, ДАН **146**, № 3, 1962, 571—573.
7. Бабич В. М., Алексеев А. С., Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов, Изв. АН, сер. геофиз., № 1, 1958, 17—31.
8. Бабич В. М., Русакова Н. Я., О распространении волн Рэлея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы, ЖВМ и МФ **2**, № 4, 1962, 652—665.
9. Басс Ф. Г., Граничные условия для электромагнитного поля на поверхности с произвольным значением диэлектрической постоянной, Радиотехн. и электрон. **5**, № 3, 1960, 389—392.
10. Белкина М. Г., Дифракция электромагнитных волн на диске, Сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения», Изд-во «Советское радио», М., 1957, 148—174.
11. Белкина М. Г., Характеристики излучения вытянутого эллипсоида вращения, Сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения», Изд-во «Советское радио», М., 1957, 126—147.
12. Бирюлин П. П., Электромагнитное поле электрического и магнитного диполей, помещенных на оси параболоидального отражателя, Изв. вузов, Физика, № 1, 1957, 42—51.
13. Боровиков В. А., О сведении некоторых трехмерных задач дифракции к задаче Дирихле для уравнения Лапласа, ДАН **144**, № 3, 1962, 527—530.
14. Боровиков В. А., О двумерной задаче дифракции на многоугольнике, ДАН **144**, № 4, 1962, 743—746.
15. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, Изд-во АН СССР, 1957.
16. Булдырев В. С., Об исследовании точных решений нестационарных задач дифракции в окрестности волновых фронтов, ДАН **129**, № 2, 1959, 291—294.

17. Булдырев В. С., Молотков И. А., О нестационарном распространении волн в однородных и изотропных средах, разделенных цилиндрической и сферической границами, Уч. зап. ЛГУ, № 246, вып. 32, 1958, 261—321.
18. Булдырев В. С., Молотков И. А., Исследование точных решений нестационарных задач дифракции в окрестности фронтов соскальзывания, ДАН 134, № 5, 1960, 1051—1054.
19. Буслаев В. С., О формулах коротковолновой асимптотики в задаче дифракции на выпуклых телах, Вестник ЛГУ, № 13, 1962, 5—21.
20. Вайнштейн Л. А., Федоров А. А., Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей, Радиотехн. и электрон. 6, № 1, 1961, 31—46.
21. Векуа И. Н., О метагармонических функциях, Труды Тбилисского матем. ин-та XII, 1943, 104.
22. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.
23. Гельчинский Б. Я., Отражение и преломление упругой волны произвольной формы в случае криволинейной границы раздела, ДАН 118, № 3, 1958, 458—460.
24. Глюзман А. М., Решение краевой задачи для гиперболоида вращения в электроразведке, Изв. АН, сер. геофиз., № 5, 1961, 717—724.
25. Глюзман А. М., Поле точечного источника, расположенного в точках дневной поверхности, имеющей форму параболоида вращения, Изв. АН, сер. геофиз., № 11, 1961, 1659—1662.
26. Гоголадзе В. Г., Общие формулы для отражения и преломления нестационарных упругих волн, ДАН 49, № 7, 1945.
27. Гоголадзе В. Г., Отражение и преломление нестационарных упругих волн, ДАН 49, № 5, 1945.
28. Гоголадзе В. Г., Собственные колебания упругого слоя, лежащего на жестком основании, Труды Сейсм. ин-та, № 119, 1947, 39—45.
29. Горяинов А. С., Асимптотическое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре, Радиотехн. и электрон. 3, № 5, 1958.
30. Гринберг Г. А., Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на плоскости с безграничной прямолинейной щелью, ЖТФ 27, № 11, 1957, 2595—2605.
31. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С., Электромагнитное поле линейного излучателя, находящегося внутри идеально проводящего параболического экрана, ЖЭТФ 30, № 3, 1956, 528—543.
32. Гринберг Г. А., Фок В. А., К теории береговой рефракции, Сб. «Исследования по распространению радиоволн», Гостехиздат, 1948.
33. Жигулин Г. В., Электромагнитное поле линейного излучателя, находящегося вблизи идеально проводящего параболического цилиндра, Уч. зап. Томского ун-та, № 28, 1957, 41—50.

34. Жигулин Г. В., Сосредоточенное возбуждение электромагнитных колебаний в параболоиде вращения внешним источником, Изв. вузов, Физика, № 2, 1958, 159—170.
35. Зволинский Н. В., Скуридин Г. А., Об асимптотическом методе решения динамических задач теории упругости, Изв. АН, сер. геофиз., № 2, 1956, 134—143.
36. Зволинский Н. В., Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред, I, II, III, Изв. АН, сер. геофиз., 1957, № 10, 1201—1218; 1958, № 1, 3—16; 1958, № 2, 165—174.
37. Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1949.
38. Иванов В. И., Коротковолновая асимптотика дифракционного поля в тени идеального параболического цилиндра, Радиотехн. и электрон. 5, № 3, 1960, 393—402.
39. Иванов В. И., Коротковолновая асимптотика функции Грина параболоида вращения (осесимметрический случай), ЖВМ и МФ 1, № 1, 1961, 90—104.
40. Иванов В. И., Дифракция коротких волн на параболическом цилиндре, ЖВМ и МФ 2, № 2, 1962, 241—254.
41. Иванов В. И., Дифракция коротких волн на гладком выпуклом цилиндре, НДВШ, Физ.-матем. науки, 1, № 6, 1958, 192—196.
42. Кейлис-Борок В. И., Асимметричные интерференционные волны в слоистой среде, ДАН 107, № 4, 1956, 533—536.
43. Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
44. Ладыженская О. А., О принципе предельной амплитуды, УМН 11, вып. 3 (75), 1957.
45. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1962.
46. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
47. Левин М. Л., Рытов С. М., О переходе к геометрическому приближению в теории упругости, Акуст. журн., вып. 2, 1956.
48. Леонтович М. А., Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн, Изв. АН, сер. физ., 8, № 1, 1944, 16—22.
49. Леонтович М. А., Фок В. А., Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения, Сб. «Исследования по распространению радиоволн», Гостехиздат, 1948, 13—39.
50. Ляв А. Я., Математическая теория упругости, ОНТИ НКТП, 1935.
51. Макаров Г. И., Петрашень Г. И., Нестационарная дифракция акустических и электромагнитных волн на сфере, Уч. зап. ЛГУ, № 170, вып. 27, 1953.
52. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
53. Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А., Поперечная диффузия на импедансном цилиндре большого радиуса, I, II, Радиотехн. и электрон. VI, № 8, № 9, 1961.

54. Малюжинец Г. Д., Формула обращения для интеграла Зоммерфельда, ДАН **118**, № 6, 1958, 1099—1102.
55. Малюжинец Г. Д., Возбуждение отражения и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней, ДАН **121**, № 3, 1958, 436—439.
56. Малюжинец Г. Д., Тужилин А. А., Электромагнитное поле, возбужденное электрическим диполем в клиновидной области, ДАН **146**, № 5, 1962, 1039—1042.
57. Менцер Дж. Р., Дифракция и рассеяние радиоволн, Изд-во «Советское радио», 1958.
58. Молотков И. А., Нестационарное распространение волн в неоднородной среде при образовании области геометрической тени, ДАН **140**, № 3, 1961, 557—559.
59. Наймарк М. А., О колебаниях тонкого упругого слоя, I, Труды Сейсмолог. ин-та, № 119, 1947, 46—52; II, Труды Сейсмолог. ин-та, № 127, 1948, 1—15.
60. Нарышкина Е., О колебаниях полупространства при произвольных начальных условиях, Труды Сейсмолог. ин-та, № 45, 1934.
61. Нарышкина Е. А., Общая теория волн Рэлея для полупространства, Труды Сейсмолог. ин-та, № 90, 1940, 1—74.
62. Николаев Б. Г., Васильева М. В., Некоторые количественные исследования по дифракции волн от угловых областей, Уч. зап. ЛГУ, № 246, 1958, 71—166.
63. Огурцов К. И., Петрашень Г. И., Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии, Уч. зап. ЛГУ, № 149, вып. 24, 1951.
64. Паныч О. И., О приближенных краевых условиях в задачах дифракции, ДАН **70**, № 4, 1950, 589—592.
65. Петрашень Г. И., Методы исследования волновых процессов в средах, содержащих сферические и цилиндрические границы раздела, Уч. зап. ЛГУ, вып. 27, № 170, 1953, 96—220.
66. Петрашень Г. И., О рациональном методе решения задач динамической теории упругости в случае слоисто-изотропных областей, Уч. зап. ЛГУ, № 208, 1956.
67. Петрашень Г. И., Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями, Уч. зап. ЛГУ, № 162, 1952.
68. Петрашень Г. И., Николаев Б. Г., Коузов Д. П., О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей, Уч. зап. ЛГУ, № 246, 1958, 5—70.
69. Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И., О задаче Лэмба в случае полупространства, Уч. зап. ЛГУ, № 135, вып. 21, 1950.
70. Петрашень Г. И., Енальский В. А., О некоторых интерференционных явлениях в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои, Изв. АН, сер. геофиз.; ч. I, 1956, № 9; ч. II, 1956, № 10; ч. III, 1956, № 11; ч. IV, 1957, № 10.
71. Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Гельчинский Б. Я., Некоторые задачи динамической теории упруго-

сти для сред, содержащих цилиндрические или сферические границы раздела, Уч. зап. ЛГУ, вып. 27, № 170, 1953, 221—265.
72. Петровский А. Д., Фейнберг Е. Л., О приближенном граничном условии в теории распространения волн вдоль земли, Радиотехн. и электрон. 5, № 3, 1960, 385—388.
73. Повзнер А. Я., Сухаревский И. В., Интегральные уравнения 2-го рода для задач дифракции на бесконечно тонком экране, ДАН 127, № 2, 1959, 291—294.
74. Повзнер А. Я., Сухаревский И. В., О нахождении асимптотики решений задач дифракции коротких волн, ЖВМ и МФ 1, № 2, 1961, 224—245.
75. Потехин А. И., Некоторые задачи дифракции электромагнитных колебаний, Изд-во «Советское радио», 1948.
76. Рытов С. М., Расчет скин-эффекта методом возмущений, ЖЭТФ 10, № 2, 1940.
77. Свекло В. А., Сюкияйнен В. А., Дифракция плоской упругой волны относительного угла, ДАН 119, № 6, 1958.
78. Свешников А. Г., Принцип излучения, ДАН 73, № 5, 1950.
79. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, т. IV, Гостехиздат, 1956.
80. Смирнов В. И., Соболев С. Л., О применении нового метода к изучению упругих колебаний, Труды Сейсмолог. ин-та, № 20, 1932; № 29, 1933.
81. Тихонов А. Н., Самарский А. А., О принципе излучения, ЖЭТФ, вып. 2, 1948.
82. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
83. Уфимцев П. Я., Приближенный расчет дифракции плоских волн на некоторых металлических телах, ч. I, ЖТФ, 1957, 27, № 8; ч. II, ЖТФ, 1958, 28, № 3.
84. Фейнберг Е. Л., Распространение радиоволн вдоль реальной поверхности, Сб. «Исследования по распространению радиоволн», Изд-во «Советское радио», 1948.
85. Филиппов А. Ф., Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн, ПММ 20, вып. 6, 1956, 688—703.
86. Филиппов А. Ф., О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн, Изв. АН, сер. геофиз., № 7, 1957, 841—854.
87. Филиппов А. Ф., Пространственная задача дифракции упругой волны на остром ребре, ПММ 23, № 4, 1959, 691—696.
88. Фок В. А., Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника, ЖЭТФ 15, № 12, 1945, 693—702.
89. Фок В. А., Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изв. АН, сер. физ., 10, № 2, 1946, 187—188.
90. Фок В. А., Обобщение отражательных формул на случай отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы, ЖЭТФ 20, № 11, 1950, 961—978.
91. Фок В. А., Решение задачи о распространении электромагнитных волн по методу параболического уравнения, Сб. «Исследования по распространению радиоволн», Гостехиздат, 1948.

92. Фок В. А., Теория дифракции от параболоида вращения, Сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения», Изд-во «Советское радио», 1957, 5—56.
93. Фок В. А., Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд-во АН, 1946, 80.
94. Фок В. А., Поле от вертикального или горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли, ЖЭТФ **19**, № 10, 1949, 916—929.
95. Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XII и XIII, ОНТИ, 1937.
96. Фридлендер Ф., Звуковые импульсы, ИЛ, 1962.
97. Фридман М. М., Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной, прямолинейной, жестко заделанной щели, Уч. зап. ЛГУ, № 114, вып. 17, 1949.
98. Фридман М. М., Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного разреза, свободного от напряжений, ДАН **66**, № 1, 1949.
99. Цой П. И., Дифракция плоских звуковых волн на торе, ПММ **25**, № 4, 1961, 771—774.
100. Шерман Д. И., О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве, Труды Сейсмолог. ин-та, № 115, 1945, 1—43.
101. Эйдус Д. М., О принципе предельного поглощения, Матем. сб. **57** (99): 1, 1962.
102. Andrejewski W., Die Bengung electromagnetischer Wellen an der leitenden Kreisscheibe und der kreisförmigen Öffnung im leitenden ebenen Schirm, Z. für angew. Phys. **5**, № 5, 1953, 178—186.
103. Bailin L. L., Silver S., Exterior electromagnetic boundary value problems for spheres and cones, IRE, Trans. Antens and Prop. **4**, № 1, 1956, 5—16. Исправления: там же **5**, № 3, 1957, 313.
104. Baker B. V., Copson E. G., The mathematical theory of Huigense principle, Oxford Univ. Press, 1950.
105. Beckmann P., Anwendung der modifizierten Watson-Transformation auf die Greenische Dyade für die Bengung an der Kugel, Z. Naturforsch. **12a**, № 12, 1957, 960—967.
106. Beckmann P., Franz W., Über die Greenische Function transparanter Zylinder, Z. Naturforsch. **12a**, № 3, 1957, 257—267.
107. Bouwkamp C. J., Diffraction theory, Repts. Progr. Phys., London **17**, 1954, 35—100.
108. Buchal R. N., Keller J. B., Boundary layer problems in diffraction theory, Comm. Pure and Appl. Math. **13**, № **1**, 1960, 85—114.
109. Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Function mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Ergebnisse der angew. Math. **2**, 1953, 234.
110. Carslow H. S., Scattering of soundwaves by a cone, Math. Ann. **74**, 1914.
111. Felsen L. B., Backscattering by large and smallangle cones, J. Appl. Phys. **26**, № 2, 1955, 138—151.

112. Felsen L. B., Plane-wave scattering by smallange cones, IRE, Trans. Ant. and Prop., AP-5, № 1, 1957, 121—126.
113. Felsen L. B., Alternative field representations in region bounded by spheres, cones and planes, IRE, Trans. Ant. and Prop., AP-5, № 1, 1957, 109—121.
114. Felsen L. B., Asymptotic expansion of the diffracted wave for a sime-infinite cone, IRE, Trans. Ant. and Prop., AP-5, № 4, 1957, 402—404.
115. Franz W., Über die Greenischen Funktionen des Zylinders und der Kugel, Z. Naturforsch. **9a**, № 9, 1954, 705—716.
116. Franz W., Theorie der Beugung electromagnetischer Wellen, Ergebnisse der angew. Math. **4**, 1957, 123.
117. Friedlander F. G. Diffraction of pulses by a circular cylinder, Comm. Pure and Appl. Math. **7**, № 4, 1954, 705—732.
118. Hochstadt H., Asymptotic formulas for diffraction by parabolic surfaces, Comm. Pure and Appl. Math. **10**, № 3, 1957, 311—329.
119. Horichi K., Theoretical analysis of electromagnetic fields in coordinate system of paraboloid of revolution, Synops. Engng Papers Grad. School Sci. and Eng. Waseda Univ., № 6, 1957, 23—31.
120. Hurd R. A., Scattering from a small anisotropic ellinsoid, Canad. J. Phys. **36**, № 8, 1958, 1058—1071.
121. Imai I., Die Bengung electromagnetischer Wellen an einem Kreiszylinder, Z. f. Phys. **137**, № 1, 1954, 31—48.
122. Kazarinoff N. D., Ritt R. K., On the theory of scalar diffraction and its application to the prolate spheroid, Ann. Phys. (USA) 6, № 3, 1959, 277—299.
123. Keller J. B., Diffraction by a convex cylinder, IRE, Trans. Ant. and Prop., AP-4, № 3, 1956, 312—321.
124. Keller J. B., Diffraction by an aperture, J. Appl. Phys. **28**, № 4, 1957, 426—444.
125. Keller J. B., Karal F. C., Surface wave excitation and propagation, J. Appl. Phys. **31**, № 6, 1960, 1039—1046.
126. Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D., Asymptotic solution of some diffraction problems, Comm. on Pure and Appl. Math. 9, № 2, 1956, 207—265.
127. Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D., Diffraction by an aperture, II, J. Appl. Phys. **28**, № 5, 1957, 570—579.
128. Kraus L., Levine L., Diffraction by an elliptic cone, Comm. Pure and Appl. Math. **14**, № 1, 1961, 49—68.
129. Levy B. R., Keller J. B., Diffraction by a spheroid, Canad. J. Phys. **38**, № 1, 1960, 128—144.
130. Lowndes J. S., A transient magnetic dipole source above a two-layer earth, Quart. J. Mech. and Appl. Math. **10**, № 1, 1957, 79—89.
131. Maue A. W., Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene, Z. für angew. Math. und Mech. **33**, № 1/2, 1953, 1—10.
132. Meixner J., Andrejewski W., Strenge Theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der Kreisförmigen Offnüngen in

vollkommen leitenden ebenen Schirm, Ann. Phys. 7, № 3—4, 1950, 157—168.
133. Mushiake Yasuto, Bachscattering for arbitrary angles of incidense of a plane electromagnetic wave on a perfectly conducting spheroid with small excentricity, J. Appl. Phys. 27, № 12, 1956, 1549—1556.
134. Primakoff H., Kline M., Keller J., Carstensen E., Diffraction of Sound around a Cirinlar Disk, J. of the Acoustical Soc. of Am. 19, № 1, 1947.
135. Rice S., Diffraction of plane radio waves by a parabolic cylinder, Calculation of shadows behind hills, Bell System Tech. J., 33, № 2, 1954, 417—504.
136. Schensted C. E., Electromagnetic and Aconstic Scattering by a Semi-Infinite Body of Revolution, J. Appl. Phys. 26, № 3, 1955.
137. Senior T. B., Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces, Appl. Scient. Res., 8, № 5—6, 1960, 418—436.
138. Sigel K. M., Schultz F. V., Gere B. H., Sleator F. B., The theoretical and numerical determination of the radar cross section of a prolate spheroid, IRE, Trans. Antens and Prop., 1956, AP-4, № 3, 266—275.
139. Soermark K., On some two-dimensial duffraction problems, Kopenhawn, 1960, 83.
140. Sternberg W., Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichtentheorie, Compositio Mathematica, 3, f. 2, 1936.
141. Ting Lu, Du the diffraction of an arbitrary pulse by a wedge or a cone, Quart. Appl. Math. 18, № 1, 1960, 89—92.
142. Ursell F., On the short-wave asymptotic theory of the wave equation $(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0$, Proc. Cambr. Phil. Soc. 53, № 1, 1957, 115—133.
143. Weston V., Solutions of the Helmholtz equation for a class of non-separable cylindrical and rotational coordinate systems, Quart. Appl. Math. 15, № 4, 1958, 420—427.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ